



TITLE:

地盤の非線形挙動を考慮した波動
伝播特性に関する研究(
Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

佐藤, 忠信

CITATION:

佐藤, 忠信. 地盤の非線形挙動を考慮した波動伝播特性に関する研究. 京都大学, 1975, 工学博士

ISSUE DATE:

1975-09-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k1660>

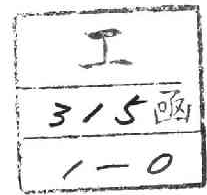
RIGHT:

I
315

地盤の非線形挙動を考慮した 波動伝播特性に関する研究

昭和 50 年 3 月

佐 藤 忠 信



地盤の非線形挙動を考慮した 波動伝播特性に関する研究

昭和 50 年 3 月

佐 藤 忠 信

目 次

第 1 章	緒 論	1
第 2 章	地盤中を伝播する単純波	7
2・1	概 説	7
2・2	飽和した多孔質弾性体の運動方程式	8
2・3	飽和した多孔質弾性体の構成式	12
2・4	飽和した多孔質弾性体中を伝わる単純波の伝播速度とその伝播形態	12
2・4・1	単純波の存在条件	13
2・4・2	伝播する波動の形態	18
2・4・3	波動の伝播速度	26
2・5	結 論	27
参 考 文 献		28
付 録	2-A	30
付 録	2-B	32
付 録	2-C	35
第 3 章	地盤中を伝播する不連続面	39
3・1	概 説	39
3・2	2相混合体の運動量の釣合式, エネルギーの釣合式ならびに構成関係	40
3・3	加速度波の振幅に関する一般的性質	43
3・4	2相混合体中を伝わる加速度波の速度	44
3・4・1	構成関係に速度こう配が入る物体中の加速度波の存否	44
3・4・2	加速度波の伝播速度	49
3・5	2相混合体中を伝わる加速度波の振幅の消長	51
3・5・1	加速度波の振幅の消長を支配する一般的な方程式	51
3・5・2	一定方向に伝播する平面的な加速度波の消長	53
3・5・3	一次元的加速度波の消長	56
3・6	結 論	59
参 考 文 献		60

第 4 章	地盤中を伝播する非線形調和波動	65
4・1	概 説	65
4・2	非線形挙動をする物体中の調和波動	66
4・2・1	解の構成	66
4・2・2	波動伝達特性の表現	72
4・2・3	$\lambda_I(Z_I)$, $\kappa_I(Z_I)$ に関する考察	75
4・3	応力～ひずみ関係の等価線形化	77
4・4	数値計算例	82
4・4・1	数値解の精度についての検討	82
4・4・2	応力～ひずみ関係が周波数伝達特性におよぼす影響	83
4・4・3	入力強度が周波数伝達特性におよぼす影響	89
4・4・4	表層地盤の不均質性が周波数伝達特性におよぼす影響	92
4・5	結 論	95
	参 考 文 献	96
第 5 章	砂質地盤中のせん断波速度	99
5・1	概 説	99
5・2	実験装置と試料	100
5・3	砂質土中を伝播する S 波速度の応力依存性	101
5・3・1	等方圧縮時におけるせん断波速度	101
5・3・2	伸張状態におけるせん断波速度	104
5・3・3	圧縮状態におけるせん断波速度	106
5・3・4	繰り返し載荷時におけるせん断波速度	109
5・4	考 察	111
5・5	結 論	113
	参 考 文 献	113
第 6 章	表層地盤内の震動分布	117
6・1	概 説	117
6・2	解 析 手 法	118
6・3	応力とひずみの関係	119
6・4	数値解の安定性	121
6・5	応答におよぼす非線形度 パラメータの影響	122

6・6	地盤のモデル化	123
6・7	せん断応力とひずみの分布	126
6・8	結 論	130
参 考 文 献		130
第 7 章	結 語	133

第 1 章 緒 論

地震時における構造物の震動特性は、周辺地盤の動特性に強く影響されることが、これまで多くの人によって指摘され、同一地域内における強震観測が行なわれるようになった結果、土木構造物の耐震性に関係するような周波数領域では、地表面近傍の局所的な地盤構成が地動の支配的要因になっていることがしだいに明らかにされて来た。このような地盤の動特性を解析するために、現在用いられている方法論は、2つの要素から構成されている。第1は、地震基盤とよばれる基盤層を想定することである。この基盤層に入射する地震波は、そこに至るまでの伝播径路とその間の媒質に依存するが、震源距離があまり変わらない領域では、ほぼ様な性質をもつと考えるものである。第2は、このような基盤層上にある表層地盤の波動伝達特性を表現することである。以下本論文では、この問題を主体とし、表層地盤の動特性に影響を与える各種の要因について考察を加える。

地盤を線形弾性体と考えれば、地盤内を伝播する地震波動は弾性波動として伝播するので、従来から動的線形弾性理論に基づいた研究が行なわれ多くの有益な結果が得られている。無限に広がる均質な弾性体中を速度の異なる2種類の波動が伝わることを最初に示したのは S. D. Poisson であって、これはよく知られているように P 波と S 波であった。この波動の伝播速度がラーメの定数 λ, μ を用いて、各々 $\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ と $\sqrt{\mu/\rho}$ で表わされることを証明したのは G. G. Stokes であると言われている。また地表や地層面などの境界面がある場合に、境界面に沿って表面波が構成されることがあるが、表面波に関する初期の研究としては A. E. H. Love や L. Reyleigh が行なったラブ波やレーレー波に関するものが著名である。¹⁾ また弾性波が境界面に入射すると波動の反射や屈折が起るが、平面で画された2つの半無限弾性体の境界におけるこの種の問題を最初に取り扱ったのは C. G. Knott であると言われている。²⁾ これらの研究はいずれも 20 世紀の初期までに行なわれたものであり、その後の弾性学の発展とともに、種々の境界条件を有する弾性体内の波動問題が、W. M. Ewing, H. Jefferys, F. Press, B. Gutenberg, 妹沢, 金井らによって解かれてきた。³⁾ 特に水平な成層構成をもつと考えられる地表面近くの地盤を対象とする場合には重複反射理論によって、その震動特性を解明する手法が金井⁴⁾ や N. A. Haskell^{5, 6)} によって発展させられ、等方弾性体からなる成層地盤内を伝播する実体波や表面波の性質はかなり明らかにされてきている。

また、地盤を構成している土は普通固体と流体の2相からなっていると考えられるから、土

を流体で飽和された線形弾性体と考え、このような物体中を伝播する実体波についての研究^{7,8)}や、このような物体からなる地盤内を伝播する平面波の反射や屈折を取り扱った研究や表面波についての研究^{9~12)}なども行なわれるようになったが、これらはいずれも線形波動論を適用したものであった。

地盤を構成している土の力学的性質を支配する要因は間げき比、拘束圧、飽和度、せん断速度など数多くあるが、特にその動特性は発生するひずみの大きさによって大きく異なってくる。ひずみが $10^{-5} \sim 10^{-4}$ 程度以下であれば、土はほぼ弾性的性質を示し動的性質はヤング率とポアソン比を測定することによって決定される。ひずみがこれ以上の大きさになると土は動的な履歴特性を示すようになり、数%の大きさになると、土はもはや原形をとどめることができなくなり破壊を生ずるようになる。現在のところ、このようなひずみレベルの全領域にわたって使用できるような構成関係は提案されていないから、波動が伝播する時に発生する地盤内ひずみに対応して構成関係を選択しなければならない。いずれにしても、地盤内に発生するひずみが 10^{-3} 以上になると言われる強震時の震動解析を行なう場合には、土は非線形特性を有した物体と考えていかなければならないから、地盤内を伝播する波動を表現するための支配方程式は必然的に非線形となり、支配方程式を線形化することによって見逃されている2次的効果の影響をも考慮できるような解析手法の開発がなされなければならない。

一方、この十数年の間に連続体の場の方程式を統一的に記述するための努力がなされ¹³⁾、構成関係を含めた非線形場の方程式の性質がかなり明らかにされてきたので、¹⁴⁾このような場の波動解を求めようとする研究も行なわれるようになった。非線形弾性体中を伝播する単純波と衝撃波についての D. R. Bland の研究、¹⁵⁾弾性体や粘弾性体中を伝播する不連続面についての最近の成果をまとめた P. J. Chen の著書¹⁶⁾などが著名であるが、系を支配する方程式は非線形偏微分方程式になるため、解の性状を明らかにするには著しい数学的困難がともなってくる。このため、非線形波動問題においては、線形波動理論のように良くまとまった統一的な解析手法は完成されていず、場の方程式が性質の良くわかっている非線形方程式系へ変換できる場合にのみ解析が可能であり、問題によって解析方法がかなり異なっているのが現状である。例えば、単純波の解析は P. D. Lax¹⁷⁾が与えた半線形双曲形偏微分方程式の解の性質を利用するものであり、加速度波と言われる2次のオーダーの不連続面の伝播問題は、場の方程式系がベルヌーイ形の非線形常微分方程式に変換できる場合にのみ解析が可能になるといった具合である。また、これらの研究はすべて無限に広がる連続体中の単調な波動問題を取り扱ったものであり、地盤のような各種の境界面を含んでいる物体中を反射や屈折を繰り返しながら伝播する周期性の波動の表現形式として用いることのできる解はまだ明らかにされていない。

以上述べてきたように、非線形波動の解析的表現に関しては未解決の問題が多いわけであるが、電子計算機の発達にともなって、非線形波動問題のシミュレーションが可能になり、連続体を何らかの方法で有限振動系に置き換えることができれば、その動特性の推定はかなり精密に行なえるようになった。特に、近年の有限要素法による解析手法の発達により物質の非線形的性質、不均質性、不連続性などを考慮に入れた解析も可能になってきている。しかしながら、この手法は対象とする系の境界が閉じた、いわゆる有限領域の問題においては厳密解にいくらかでも近似することができるが、地盤のような無限媒体の場合にはどこに境界を設けるかによって系の応答にかなりの差が生じる。かつ、この境界のために媒体中を伝播する波動が境界で反射を繰り返すため、波動のエネルギーは振動系の中に閉じ込められ、無限遠方に伝播する波動によるエネルギーの逸散効果が考慮できないという問題点があった。J. Lysmer 等^{18~20)}は表面波によるエネルギー逸散効果を有限要素法に組み込む解析方法を示し、N. C. Tsai 等²¹⁾はSH波の重複反射問題を有限振動系へ置き換える手法を示しているが、解析は地表層を線形弾性体とした場合のものであって、非線形問題を取り扱うまでには至っていない。

以上のような観点から、本論文では地盤を構成する土の構成関係の設定いかんによって、地盤内を伝播する波動の特性がどのように変化するかを整理し、非線形挙動をする表層地盤の震動特性を解析するための方法論の解明を試みようとするものである。

まず、2、3章では土を混相体としてとらえ、このような物質中を伝播する単調な波動、すなわち、初期条件あるいは境界条件として単調な変形が与えられたときに伝播する波動の性質について考察を加える。支配方程式が非線形になっているので初期条件あるいは境界条件として滑らかな変形が与えられても時間と空間の位置が変わると、場が不連続性を示すような場合があるので、単調に滑らかな波動のほかに不連続解の性質も調べる必要がある。したがって、2章では2相混合体中の単調に滑らかな波動を、3章では不連続面の伝播問題について考察を加える。

4章以下6章までは水平な成層地盤を対象とし、このような地盤内を伝播する非線形波動の伝播問題を取り扱っている。特に、土の動的な非線形性が波動伝播特性にどのような影響を与えるかについて検討を加える。まず、調和波動の伝播問題を解析するための新しい手法を提案し、地盤内の初期弾性係数の推定法について実験的考察を行なった後、特性曲線法によって、地盤内に発生する応力とひずみの大きさについて考察を加える。なお、問題を簡単にするため、土は1相系の物質からなるとし、構成関係としてはせん断応力とせん断ひずみの関係しか考えていないので、2、3章で扱うような一般的構成関係をもつ物体中の波動伝播問題にまで拡張することは困難であるが、水平な成層地盤に鉛直下方からSH波が入射するような場合の問題

の解析には十分適用できるものである。

さらに各章の内容の概略を述べると以下のものである。

2章では、土を流体で飽和された等方性の非線形多孔質弾性体でモデル化し、このような物体中を伝播する単純波の形態について考察を加える。これまで提案されている混相系の方程式は流通座標系によるものがほとんどであり、単純波の伝播問題の解析を行なうことは不可能であった。したがって変分原理に基づいて流体で飽和された多孔質弾性体を支配する運動方程式を基準座標系で表現する方法について考察し、ラグランジェ密度関数を用いた場の表現形式を与える。こうして求め^た方程式が全双曲形になる条件を示した後、伝播できる単純波の種類と伝播速度ならびに波面における変形形態についても検討を加える。

3章では、土を異なる2つの物質が混合したものとみなし、このような物体中を伝播する2次の不連続面の伝播速度とその振幅の消長について考察を加える。まず構成関係について略述した後、加速度波の振幅を支配する一般方程式を基準座標系で表現する。この方程式系を用いることにより2相系を伝播する加速度波の伝播速度が与えられる。この場合、構成関係に速度勾配が入れば加速度波の伝播形態がどのように変化するかについても検討する。つぎに加速度波の振幅の消長を、一定方向に伝播する平面的な加速度波を考えることにより、3次元的広がりをもつものとして取り扱うとともに、温度が波動の伝播形態におよぼす影響についても考察する。

4章では、土を履歴特性を有する物質と考え、応力～ひずみ関係を等価な弾性係数と減衰定数に置き換えることにより、このような物質からなる地盤中を伝播する単一の非線形調和波動の解析的表現形式を、線形解の表現形式を用いて構成する手法について論じ、この手法を用い、基盤層と表層の2層から構成される地盤を対象として数値解析例を示す。この結果表層の周波数伝達特性におよぼす入力強度や構成関係の影響についての検討が行なえることになる。

5章では、前章で用いた土の動的構成関係を規定するパラメータの1つである、微小ひずみ下でのせん断波速度 V_s について実験的考察を加える。実験装置の概略を説明した後各種応力状態のもとでの V_s について調べ、 V_s の応力ならびにひずみ依存性について考察する。この結果を用いて実地盤内での V_s の値を推定する方法を示す。

6章では特性曲線法を用いることにより、これまでに得られている地表面の強震記録をもとにして地盤内の震動特性、特に地盤内に発生するせん断ひずみならびにせん断応力の大きさについて考察する。まず解析手法と使用した応力～ひずみ関係の特性を述べる。つぎに数値解析の安定性について検討を加え、応力～ひずみ関係の非線形度を表わすパラメータの地盤内震動特性におよぼす影響などを調べた後、実地盤のモデル化を行ない地盤内に発生する応力ならび

にひずみの深さ方向分布の特性について種々の観点から考察する。

参 考 文 献

- 1) 妹沢克惟：振動学，国際理工研究社，昭 46 複刻版。
- 2) 本多弘吉：地震波動，岩波書店，昭 17.
- 3) Ewing W. M., W. S. Jardetzky and F. Press : Elastic Waves in Layerd Media, McGraw-Hill, 1957.
- 4) Yoshizawa S., T. Tanaka and K. Kanai : Some Features of Strong Underground Earthquake Motions Computed from Observed Surface Records, Bull. Earthq. Res. Inst. (Tokyo), Vol. 46, pp. 667-686, 1968.
- 5) Haskell N. A. : The Dispersion of Surface Waves in Multilayered Media, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 43, pp. 17-34, 1953.
- 6) Haskell N. A. : Crustal Reflection of Plane SH Waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 65, pp. 1447-1450, 1960.
- 7) Biot M. A. : Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range, Jour. Acoust. Soc. Am., Vol. 28, No. 2, pp. 168-178, 1956.
- 8) Biot M. A. : Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range, Jour. Acoust. Soc. Am., Vol. 28, No. 2, pp. 178-191, 1956.
- 9) Deresiewicz H. : The Effect of Boundaries on Wave Propagation in a Liquid-Filled Porous Solid : I. Reflection of Plane Waves at a Free Plane Boundary (Non-Dissipative Case), Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 50, No. 4, pp. 599-607, 1960.
- 10) Deresiewicz H. : The Effect of Boundaries on Wave Propagation in a Liquid-Filled Porous Solid : II. Love Waves in a Porous Layer, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 51, No. 1, pp. 51-59, 1961.
- 11) Deresiewicz H. and J. T. Rice : The Effect of Boundaries on Wave Propagation in a Liquid-Filled Porous Solid : III. Reflection of Plane Waves at a Free Plane Boundary (General Case), Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 52, No. 3, pp. 595-625, 1962.
- 12) Deresiewicz H. : The Effect of Boundaries on Wave Propagation in a Liquid-Filled Porous Solid : IV. Surface Waves in a Half-Space, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 52, No. 3, pp. 627-638, 1962.

- 13) Truesdell C. and R. Toupin : Principles of Classical Mechanics and Field Theory, Handbuch der Physik, III/1, Springer-Verlag, pp.226–790, 1960.
- 14) Truesdell C. and W. Noll : The Non-Linear Field Theory of Mechanics, Handbuch der Physik, III/3, Springer-Vorlag, 1965.
- 15) Bland D. R. : Nonlinear Dynamic Elasticity, Blaisdell, 1969.
- 16) Chen P. J. : Growth and Decay of Waves in Solids, Handbuch der Physik, Springer-Verlag, VIa/3, pp. 303–401, 1973.
- 17) Lax P. : Hyperbolic System of Conservation Laws II., Comm. Pure Appl. Math., Vol. 10, pp. 537–566, 1957.
- 18) Lysmer J. : Lumped Mass Method for Rayleigh Waves, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 60, No. 1, pp. 89–104, 1970.
- 19) Lysmer J. and A. Drake : The Propagation of Love Waves Across Nonhorizontally Layered Structures, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 61, No. 5, pp. 1233–1251, 1971.
- 20) Lysmer J. and G. Wass : Shear Waves in Plane Infinite Structures, Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 98, EM. 1, pp. 85–105, 1972.
- 21) Tsai N. C. and G. W. Housner : Calculation of Surface Motions of a Layered Half-Space, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 60, No. 5, pp. 1625–1651, 1970.

第2章 地盤中を伝播する単純波

2・1 概 説

地震時の地盤の動的挙動を論ずる場合、地盤を構成する土の動的な物理定数と波動の伝播速度の関係が明らかにされ、その解析的な表示が可能でなければならない。これまでは線形弾性論に基づいてこれらの関係式を求めておき、土に振動を与えたときの振動特性を測定し、土のヤング率、ポアソン比、せん断弾性係数などを求めようとする研究がなされてきた。^{1~4)}しかし、土木構造物の安全性に関係する地表層では層を構成する土はかなり軟かく、かつ固体と流体の2相から構成されていることが多いから、このような物質を単一相からなる線形弾性体と考えることはかなり大胆な仮定といえる。2相系の物体中を伝わる実体波の研究には M. A. Biot^{5,6)}のものがあるが、これは線形理論であるから土のような非線形性を有する物体の挙動を十分表示できるものとは考えられない。

本章では、強震時の地盤の非線形応答を解析するための第一段階として、地盤を構成する土を流体で飽和された等方性の非線形多孔質弾性体でモデル化し、このような物体中を伝播する実体波の形態について考察を加える。

近年、電磁流体の非線形問題を解くために開発された数学的手法を用いて、1相系の物体中を伝播する非線形波動の理論的な解析が詳しくなされている。これらの研究は物体中を伝播する不連続面を取り扱ったもの^{7~12)}と単純波 (simple wave) を取り扱ったもの^{13~17)}に大別することができる。単純波とは、運動を支配する半線形双曲形方程式の解のうち時間と空間の全領域において滑らかなものをいい、その基礎理論は P. D. Lax¹³⁾によって与えられた。D. R. Bland は等方性の可圧縮性非線形弾性体中を伝わる圧縮波の解析¹⁴⁾にこの理論を用い、引き続いて平面波の解析¹⁵⁾を行なって可圧縮性非線形弾性体中を伝播する単純波は3組あることを示した。また W. D. Collins¹⁶⁾は非圧縮性の非線形弾性体中を伝わる平面波の研究にこの理論を使い、D. R. Bland が得たのと同様な結果を得ている。直交異方性の非線形弾性体については I. C. Howard¹⁷⁾が研究し、このような物体中を伝播する単純波は3組存在することを明らかにした。

著者は、単純波理論により、先に述べた2相系の物体中を伝播する波動の構造と伝播速度について若干の研究^{18,19)}を行ってきたが、本章では、流体で飽和された非線形多孔質弾性体を支配する保存系の運動方程式について検討を加えたのち、このような物体の構成式について述べ、伝播する単純波の特性について考察を加える。

2・2 飽和した多孔質弾性体の運動方程式

物体の運動を取り扱う場合、ある特定の時刻に粒子の占めていた位置を基準としてそれからの変形を考える場合と、時間とともに変化する粒子位置を基準として考える場合の2通りがある。基準となる座標系を前者では単に基準座標 (reference coordinate) と名づけ、後者を流通座標 (current coordinate) と名づけることにする。以下では両者とも直交直線座標系を用いることにする。

いま、混合体の α 番目の構成要素を $\Delta^{(\alpha)}$ という文字で代表する。時刻 $\tau=0$ で同じ位置 X_I にある $\Delta^{(\alpha)}$ が互いに相対運動を行なって、時刻 $\tau=t$ で $x_i^{(\alpha)}$ にあるとすれば次式をうる。

$$x_i^{(\alpha)} = x_i^{(\alpha)}(X_I, t) \quad (2\cdot1)$$

なお、すべてのラテン文字の添字は 1, 2, 3 の値をとり、特に断わらないかぎりラテン文字の添字については総和規約を適用し、ギリシャ文字の添字には適用しないものとする。大文字の添字の付いた記号はすべて基準座標系によるものを表わし、小文字の添字の付いた記号は流通座標系によるものを表わすものとする。運動方程式を基準座標系で表示する場合には、時刻 $\tau=0$ における物体点が時刻 $\tau=t$ までにどれだけ変化するかを考えなければならない。この場合構成要素 $\Delta^{(\alpha)}$ の変位は次式で表わされる。

$$x_i^{(\alpha)} = X_I + U_I^{(\alpha)}(X_I, t) \quad (2\cdot2)$$

ここに、 $U_I^{(\alpha)}$ は基準座標系で測った $\Delta^{(\alpha)}$ 相の変位。これから $\Delta^{(\alpha)}$ 相の基準座標系での速度 $v_I^{(\alpha)}$ 、加速度 $f_I^{(\alpha)}$ は次のようになる。

$$v_I^{(\alpha)} = \frac{\partial U_I^{(\alpha)}}{\partial t}, \quad f_I^{(\alpha)} = \frac{\partial^2 U_I^{(\alpha)}}{\partial t^2} \quad (2\cdot3)$$

また、 $\Delta^{(\alpha)}$ 相の変形勾配 (deformation gradient) は次式で表わされる。

$$x_{i,J}^{(\alpha)} = \delta_{IJ} + U_{I,J}^{(\alpha)} \quad (2\cdot4)$$

ここに、 $(\)_{,J}$ は $\partial(\)/\partial X_J$ を表わす記号であり、 δ_{IJ} はクロネッカーのデルタである。これから $\Delta^{(\alpha)}$ のグリーンのひずみテンソル $E_{IJ}^{(\alpha)}$ は次式で定義される。

$$E_{IJ}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (U_{I,J}^{(\alpha)} + U_{J,I}^{(\alpha)} + U_{K,I}^{(\alpha)} U_{K,J}^{(\alpha)}) \quad (2\cdot5)$$

連続体の運動方程式をラグランジェの方程式によって求められれば、独立した粒子からなる構成系の運動方程式を取り扱う場合のようにその形式が単純化される。 n 次の自由度をもつ粒子系の場合には、ラグランジェの方程式は独立変量と時間 t に関する n 元の連立常微分方程式になる。すなわち、ラグランジェ関数は n 個の一般化座標と n 個の一般化速度でもって表示される。一方、連続的な保存系では、運動方程式は時間と空間座標で表わされる連立偏微分方程式になるはずである。これは内部エネルギーが変形勾配に関係しているからである。したがって連続体のラグランジェ関数は一般化座標と一般化速度ならびに一般化座標の空間微分の関数になると考えられる。方程式の詳細な形は用いる座標の性質によって異ってくる。以下では直交直線座標を基準座標とした場合の混合体のラグランジェの運動方程式を誘導する。

3次元空間内での混合体のラグランジェ密度 L は基準座標空間で次のように表わせる。

$$L = L(H_{I,J}^{(\alpha)}, \dot{H}_I^{(\alpha)}, H_I^{(\alpha)}, t) \quad (2.6)$$

ここに、 $H_I^{(\alpha)}$ は基準座標空間での α 相の一般化座標、 t は時間、 $(\dot{})$ 記号は $\partial()/\partial t$ を表わしている。したがって基準座標空間での体積が V なる系全体のラグランジアン \mathcal{L} は次式で表わされる。

$$\mathcal{L} = \int_V L dV$$

上式にハミルトンの変分原理を適用すると次式をうる。

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_V \delta L dV dt = 0 \quad (2.7)$$

上式に式(2.6)を代入し部分積分をほどこすと次式をうる。

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \int_V \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_I^{(\alpha)}} \delta H_I^{(\alpha)} dV \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_S \frac{\partial L}{\partial H_{I,J}^{(\alpha)}} \delta H_I^{(\alpha)} N_J^{(\alpha)} dS dt \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_V \left\{ \frac{\partial L}{\partial H_I^{(\alpha)}} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{H}_I^{(\alpha)}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial H_{I,J}^{(\alpha)}} \right)_{,J} \right\} \delta H_I^{(\alpha)} dV dt \\ = & 0 \end{aligned}$$

ここに、 $N_J^{(\alpha)}$ は α 相の基準座標における外向き方線ベクトルの成分である。変分量 $\delta H_I^{(\alpha)}$ は互いに独立であるから、上式より混合体の運動方程式として次式をうる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{H}_I^{(\alpha)}} \right) + \frac{\partial}{\partial X_J} \left(\frac{\partial L}{\partial H_{I,J}^{(\alpha)}} \right) - \frac{\partial L}{\partial H_I^{(\alpha)}} = 0 \quad (2.8)$$

以上混合体の保存系の運動方程式の一般論を述べたが、以下では流体と弾性体の混合した2相系について考える。いま、一般化座標として

$$\left. \begin{aligned} H_I^{(1)} &= U_I(X_J, t) & : & \text{弾性相の変位} \\ H_I^{(2)} &= V_I(X_J, t) & : & \text{流体相の変位} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

をとれば、式(2.8)は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}_I} \right) + \frac{\partial}{\partial X_J} \left(\frac{\partial L}{\partial U_{I,J}} \right) - \frac{\partial L}{\partial U_I} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}_I} \right) + \frac{\partial}{\partial X_J} \left(\frac{\partial L}{\partial V_{I,J}} \right) - \frac{\partial L}{\partial V_I} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

ここで、 $\alpha = 1$ は弾性相の、 $\alpha = 2$ は流体相の変量を表わすものとし、以後の解析でも同様に考える。

なお構成系全体のラグランジェ密度 L は、系全体の運動エネルギー T 、ひずみエネルギー W 、流体相ならびに弾性相の物体力ポテンシャル Φ_F, Φ_E を用いて次のように表わされる。

$$L = T - W - \rho_F \Phi_F - \rho_E \Phi_E \quad (2.11)$$

ここに、 ρ_F, ρ_E は基準座標系における流体相ならびに弾性相の密度を表わす。いま弾性相の物体力を $\rho_E G_I^E$ 、流体相のそれを $\rho_F G_I^F$ とおけば次式をうる。

$$G_I^E = \frac{\partial \Phi_E}{\partial x_i^{(1)}} \quad , \quad G_I^F = \frac{\partial \Phi_F}{\partial x_i^{(2)}} \quad (2.12)$$

また、系全体の運動エネルギーは次のように表わされる。

$$2T = \rho_{11} \dot{U}_K \dot{U}_K + 2\rho_{12} \dot{U}_K \dot{V}_K + \rho_{22} \dot{V}_K \dot{V}_K \quad (2.13)$$

ここに、 $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ は Biot⁵⁾ が提唱した密度係数であり、基準座標系で表示したものである。なお微小変形時の Biot の解析と同じ手法を用いて、有限変形の場合に $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}, \rho_F, \rho_E$ の間に次式の成立することが簡単に求められる。

$$\rho_E = \rho_{11} + \rho_{12} \quad , \quad \rho_F = \rho_{12} + \rho_{22} \quad (2 \cdot 14)$$

流体相が動的な変形をするときは弾性相から抵抗を受ける。逆に弾性相が動的変形をするときは流体相から抵抗を受け、あたかも各相の動的密度に変化を生ずるような挙動を示す。 ρ_{12} はこのような動的エネルギーのカップリングを表わす密度係数と考えられる。なおこれら密度係数は次の関係式を満たさなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} > 0 \quad , \quad \rho_{22} > 0 \quad , \quad \rho_{12} < 0 \\ \rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 15)$$

構成系全体のひずみエネルギー W は流体相と弾性相のグリーンのひずみテンソルの関数となるから、式(2・5)、(2・9)を考慮すれば次式をうる。

$$W = W(E_{IJ}^{(1)}, E_{IJ}^{(2)}) = W(U_{I,J}, V_{I,J}) \quad (2 \cdot 16)$$

式(2・11)、(2・13)、(2・16)を式(2・10)に代入することによって、流体相と弾性相の混合された物体の運動方程式として次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 U_I}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 V_I}{\partial t^2} + \rho_E \frac{\partial \Phi_E}{\partial U_I} &= \left(\frac{\partial W}{\partial U_{I,J}} \right)_{,J} \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 U_I}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 V_I}{\partial t^2} + \rho_F \frac{\partial \Phi_F}{\partial V_I} &= \left(\frac{\partial W}{\partial V_{I,J}} \right)_{,J} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 17)$$

上式の第1、第2式はそれぞれ弾性相、流体相に対する運動方程式であり、いずれも有限変形理論によって誘導されたものである。式(2・17)に現われる Φ_E, Φ_F の変位による微分項は式(2・2)、(2・12)を用いて、次式が示すように物体力に関係する。

$$\left. \begin{aligned} \rho_E \frac{\partial \Phi_E}{\partial U_I} &= \rho_E \frac{\partial \Phi_E}{\partial x_i^{(1)}} = \rho_E G_I^E \\ \rho_F \frac{\partial \Phi_F}{\partial V_I} &= \rho_F \frac{\partial \Phi_F}{\partial x_i^{(2)}} = \rho_F G_I^F \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 18)$$

なお、式(2・17)の右辺の値は、おのおの、弾性相と流体相に発生するPiola-Kirchhoffの応力テンソル $L_{Ji}^{(\alpha)}$ の空間微分 $L_{Ji,J}^{(\alpha)}$ に相当する量になっている。

2・3 飽和した多孔質弾性体の構成式

2相系が超弾性体^{*}(hyperelastic material)²⁰⁾と超弾性流体^{**}(hyperelastic fluid)²⁰⁾の混合したものからなり、2相を構成する物質の巨視的な性状が等方性を示せば、構成系全体のひずみエネルギー W は各相のひずみ不変量のみ関数となるから、²³⁾式(2・16)の関係は次式のよ

$$W = W(I^{(1)}, II^{(1)}, III^{(1)}, I_{VF}) \quad (2 \cdot 19)$$

ここに、 $I^{(1)}, II^{(1)}, III^{(1)}$ は弾性相のひずみ不変量であり、 I_{VF} は流体相の体積変化を表わす不変量であり、流体相のグリーンのひずみテンソル $E_{IJ}^{(2)}$ とは次式の関係がある。²¹⁾

$$I_{VF} = \sqrt{\det(\delta_{IJ} + 2E_{IJ}^{(2)})} \quad (2 \cdot 20)$$

この場合、弾性相のKirchhoffの応力テンソル K_{IJ} 、流体相のKirchhoffの応力テンソル P_{IJ} は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K_{IJ} &= \frac{\partial W}{\partial E_{IJ}^{(1)}} = \frac{\partial W}{\partial I^{(1)}} \frac{\partial I^{(1)}}{\partial E_{IJ}^{(1)}} + \frac{\partial W}{\partial II^{(1)}} \frac{\partial II^{(1)}}{\partial E_{IJ}^{(1)}} + \frac{\partial W}{\partial III^{(1)}} \frac{\partial III^{(1)}}{\partial E_{IJ}^{(1)}} \\ P_{IJ} &= \frac{\partial W}{\partial I_{VF}} \delta_{IJ} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 21)$$

なお、ひずみ不変量とひずみテンソルの間には次式の関係式がある。²¹⁾

$$\left. \begin{aligned} I^{(\alpha)} &= \delta_{KL} E_{KL}^{(\alpha)} \\ II^{(\alpha)} &= \frac{1}{2!} e_{KMP} e_{LNP} E_{LK}^{(\alpha)} E_{NM}^{(\alpha)} \\ III^{(\alpha)} &= \frac{1}{3!} e_{KMP} e_{LNQ} E_{LK}^{(\alpha)} E_{NM}^{(\alpha)} E_{QP}^{(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 22)$$

ここに、 e_{KMP} は交代記号である。

2・4 飽和した多孔質弾性体中を伝わる単純波の伝播速度とその伝播形態

式(2・17)で物体力を無視した場合の方程式は半線形(quasi-linear)双曲形の偏微分方程

^{*} 物体が単位質量当たりのひずみエネルギー関数 W をもち、これがひずみテンソルの解析関数であり、均質な応力のない自然状態において、 W の変化の割合が応力仕事の変化の割合に等しいような物体。

^{**} 上記の条件を満たし、かつ、ひずみエネルギー関数が体積ひずみのみの関数になっているような物体

式になるから、適当な条件があれば特性曲線法によって解を求めることができる。特に2個の独立変量をもつ半線形双曲形偏微分方程式の解の内1組の特性曲線上の Riemann 不変量が一定値になるような解を単純波解といい、時間と空間の全領域において滑らかな解となっている。ここでは文献 13), 22) に紹介されている単純波理論により流体で飽和された多孔質弾性体中を伝わる単純波の存在条件、伝播速度、ならびにその伝播形態について述べる。なお単純波に関する一般的な理論は付録 2-A に簡単に記述する。

2・4・1. 単純波の存在条件

系を支配する運動方程式は式(2・17)で与えられる。以下の解析は波動の伝播速度ならびに伝播形態を主に考えるので、式(2・17)で物体力を無視した場合のみを取り扱うことにする。

いま座標軸 X_1 を波動の伝播する方向と一致させ、次式で表わされるような変形場を考える。

$$U_I = U_I(X_1, t), \quad V_I = V_I(X_1, t) \quad (2 \cdot 23)$$

この場合、変形勾配 $U_{I,J}, V_{I,J}$ は $J=1$ 以外は 0 となるので次式で表わされる変数を定義する。

$$m_I = U_{I,1}, \quad n_I = V_{I,1} \quad (2 \cdot 24)$$

このような変形場は X_1 方向へ伝播する均一な平面波を考えることによって得られる。弾性相のひずみ不変量 $I^{(1)}, II^{(1)}, III^{(1)}$ と流体相の体積変化を表わすひずみ不変量 I_{VF} は式(2・5), (2・20), (2・22) を考慮して次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} I^{(1)} &= m_1 + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \\ II^{(1)} &= -\frac{1}{4}(m_2^2 + m_3^2), \quad III^{(1)} = 0 \\ I_{VF} &= (1 + 2n_1 + n_1^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 25)$$

式(2・24)の関係を用いて式(2・17)の物体力を無視した式を書きなおすと次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 U_I}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 V_I}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial m_I \partial m_J} \frac{\partial m_J}{\partial X_1} + \frac{\partial^2 W}{\partial m_I \partial n_J} \frac{\partial n_J}{\partial X_1} \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 U_I}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 V_I}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial n_I \partial m_J} \frac{\partial m_J}{\partial X_1} + \frac{\partial^2 W}{\partial n_I \partial n_J} \frac{\partial n_J}{\partial X_1} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 26)$$

いま、次式で定義される変数

$$\xi_I = \dot{U}_I, \quad \eta_I = \dot{V}_I \quad (2 \cdot 27)$$

を用いると、式(2・26)は次のような1階の連立偏微分方程式系へ変換される。

$$\left. \begin{aligned} A_{IJ} m_{J,1} + B_{IJ} n_{J,1} - \dot{\xi}_I - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \right) \dot{\eta}_I &= 0 \\ C_{IJ} m_{J,1} + D_{IJ} n_{J,1} - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \right) \dot{\xi}_I - \dot{\eta}_I &= 0 \\ \xi_{I,1} - \dot{m}_I &= 0 \\ \eta_{I,1} - \dot{n}_I &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 28)$$

ただし、 A_{IJ} , B_{IJ} , C_{IJ} , D_{IJ} は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_{IJ} &= \frac{1}{\rho_{11}} \frac{\partial^2 W}{\partial m_I \partial m_J}, \quad B_{IJ} = \frac{1}{\rho_{11}} \frac{\partial^2 W}{\partial m_I \partial n_J} \\ C_{IJ} &= \frac{1}{\rho_{22}} \frac{\partial^2 W}{\partial n_I \partial m_J}, \quad D_{IJ} = \frac{1}{\rho_{22}} \frac{\partial^2 W}{\partial n_I \partial n_J} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 29)$$

式(2・19), (2・25)を考慮して式(2・29)を成分で表示すると次式のようになる

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \theta_{mm}/\rho_{11}, \quad A_{12} = 2m_2 \theta_{mM}/\rho_{11} \\ A_{13} &= 2m_3 \theta_{mM}/\rho_{11} \\ A_{22} &= \{4m_2^2 \theta_{MM} + 2\theta_M\}/\rho_{11} \\ A_{33} &= \{4m_3^2 \theta_{MM} + 2\theta_M\}/\rho_{11} \\ A_{23} &= 4m_2 m_3 \theta_{MM}/\rho_{11}, \quad A_{12} = A_{21} \\ A_{13} &= A_{31}, \quad A_{23} = A_{32} \\ B_{11} &= \theta_{mn}/\rho_{11}, \quad B_{21} = 2m_2 \theta_{Mn}/\rho_{11} \\ B_{31} &= 2m_3 \theta_{Mn}/\rho_{11} \\ \text{他の } B_{IJ} &= 0 \\ C_{11} &= \theta_{mn}/\rho_{22}, \quad C_{12} = 2m_2 \theta_{Mn}/\rho_{22} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 30)$$

$$C_{13} = 2m_3 \theta_{Mn} / \rho_{22}$$

$$\text{他の } C_{IJ} = 0$$

$$D_{11} = \theta_{nn} / \rho_{22}, \text{ 他の } D_{IJ} = 0$$

ただし

$$M = m_2^2 + m_3^2 \quad (2 \cdot 31)$$

であり，次式の関係を用いている。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{mn} &= \frac{\partial^2 W}{\partial m_1^2}, \quad \theta_{mn} = \frac{\partial^2 W}{\partial m_1 \partial n_1}, \quad \theta_{nn} = \frac{\partial^2 W}{\partial n_1^2} \\ \theta_M &= \frac{\partial W}{\partial M}, \quad \theta_{MM} = \frac{\partial^2 W}{\partial M^2}, \quad \theta_{mM} = \frac{\partial^2 W}{\partial m_1 \partial M} \\ \theta_{Mn} &= \frac{\partial^2 W}{\partial M \partial n_1} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 32)$$

なお， θ に対する添字 m, n は小文字であるが， θ は基準座標系における変量であり，添字 m, n, M については総和規約は用いないものとする。

式 (2・28) は半線形 1 階 12 元連立偏微分方程式であるが，式 (2・30) の関係を考慮すると次式で表わされるような 1 階 8 元連立偏微分方程式系へ変換される。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} m_{1,1} + A_{12} m_{2,1} + A_{13} m_{3,1} + B_{11} n_{1,1} - \dot{\xi}_1 - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \right) \dot{\eta}_1 &= 0 \\ A_{21} m_{1,1} + A_{22} m_{2,1} + A_{23} m_{3,1} + B_{21} n_{1,1} - \left(1 - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11} \rho_{22}} \right) \dot{\xi}_2 &= 0 \\ A_{31} m_{1,1} + A_{32} m_{2,1} + A_{33} m_{3,1} + B_{31} n_{1,1} - \left(1 - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11} \rho_{22}} \right) \dot{\xi}_3 &= 0 \\ C_{11} \dot{m}_{1,1} + C_{12} \dot{m}_{2,1} + C_{13} \dot{m}_{3,1} + D_{11} \dot{n}_{1,1} - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \right) \dot{\xi}_1 - \dot{\eta}_1 &= 0 \\ \dot{\xi}_{1,1} - \dot{m}_1 &= 0 \\ \dot{\xi}_{2,1} - \dot{m}_2 &= 0 \\ \dot{\xi}_{3,1} - \dot{m}_3 &= 0 \\ \dot{\eta}_{1,1} - \dot{n}_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 33)$$

ただし、次式の関係が成立している。

$$\dot{\eta}_2 = -\left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right) \dot{\xi}_2, \quad \dot{\eta}_3 = -\left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right) \dot{\xi}_3 \quad (2\cdot34)$$

式(2・33)の特性曲線の勾配を λ とすれば、付録2-Aの式(A-2)を参照し次式のように与えられる。

$$|m_{IJ} - \lambda l_{IJ}| = 0 \quad (2\cdot35)$$

ただし、 m_{IJ} , l_{IJ} は次式で示されるようなマトリックスである。

$$m_{IJ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & C_{13} & D_{11} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2\cdot36)$$

$$l_{IJ} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \rho_{12}/\rho_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{12}/\rho_{22} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2\cdot37)$$

ここに

$$\alpha = 1 - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11} \rho_{22}} \quad (2\cdot38)$$

式(2・36), (2・37)を式(2・35)に代入し整理すると次式をうる。

$$|f_{IJ}| = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda^2 & A_{12} & A_{13} & B_{11} - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}}\right) \lambda^2 \\ A_{21} & A_{22} - \alpha \lambda^2 & A_{23} & B_{21} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \alpha \lambda^2 & B_{31} \\ C_{11} - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right) \lambda^2 & C_{12} & C_{13} & D_{11} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2 \cdot 39)$$

式(2・39)に式(2・30)を代入し整理すると次式をうる。

$$\left(\alpha \lambda^2 - \frac{2\theta_M}{\rho_{11}}\right) \{ \alpha^2 \lambda^6 - \alpha(p+q) \lambda^4 + (\alpha r + pq - s) \lambda^2 - qr + t \} = 0 \quad (2 \cdot 40)$$

これより次式のいずれかが成立する。

$$\lambda^2 = \frac{2\theta_M}{\alpha \rho_{11}} \quad (2 \cdot 41)$$

$$\alpha^2 \lambda^6 - \alpha(p+q) \lambda^4 + (\alpha r + qp - s) \lambda^2 - qr + t = 0 \quad (2 \cdot 42)$$

ここに、 p, q, r, s, t は次式で定義されるような変数でひずみエネルギーと関係をもつものである。

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{\rho_{11}} \theta_{mm} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} \theta_{mn} + \frac{1}{\rho_{22}} \theta_{nn} \\ q &= \frac{2}{\rho_{11}} (2M\theta_{MM} + \theta_M) \\ r &= \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (\theta_{mn} \theta_{nn} - \theta_{mn}^2) \\ s &= \frac{4M}{\rho_{11}} \left(\frac{1}{\rho_{11}} \theta_{mM}^2 - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} \theta_{mM} \theta_{Mn} + \frac{1}{\rho_{22}} \theta_{Mn}^2 \right) \\ t &= \frac{4M}{\rho_{11}^2 \rho_{22}} (\theta_{nn} \theta_{mM}^2 - 2\theta_{mn} \theta_{mM} \theta_{Mn} + \theta_{mn} \theta_{Mn}^2) \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 43)$$

式(2・40)が λ^2 に関して正の4実根をもつとき方程式(2・33)は全双曲形となり単純波が存在することになる。このためには、式(2・41)の右辺が正でかつ式(2・42)が正の3実根をもてばよいことになる。すなわち、次式の関係が満されればよい。

$$\theta_M > 0 \quad (2\cdot44)$$

$$\left. \begin{aligned} 4b(3b-a^2)^2 - 2a(3b-a^2)(9c-ab) + 3(9c-ab)^2 &< 0 \\ c < 0, \quad b > 0, \quad a < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2\cdot45)$$

ただし、 a, b, c は p, q, r, s, t と次式のような関係にある。

$$a = -(p+q)/\alpha, \quad b = (\alpha r + pq - s)/\alpha^2, \quad c = (t - qr)/\alpha^2 \quad (2\cdot46)$$

式(2・44), (2・45) が成立するとき、すなわち、ひずみの間に適当な条件があるとき超弾性流体と超弾性体の混合体中を伝播する単純波は4組存在することになる。おのおの1組は同じ速度で正ならびに負の方向へ伝播する波からなっている。以下で詳しく述べるが、これらは流体相を伝わる圧縮波、弾性相を伝わる圧縮波、弾性相を伝わる2種類のせん断波の計4組から構成される。

2・4・2 伝播する波動の形態

式(2・39)の1行目の各余因子行列式を $F_{I1}, F_{I2}, F_{I3}, F_{I4}$ とすれば、これらは λ^2 の関数となる。この場合、変位勾配 m_1, m_2, m_3, n_1 の増分 dm_1, dm_2, dm_3, dn_1 はマトリックス $[f_{IJ}]$ の固有ベクトルとして表わされるから $dm_i (i=1, 2, 3)$ と dn_1 の間には次式が成立する(付録2-A 式(A-10)参照)。

$$\frac{dm_1}{F_{I1}} = \frac{dm_2}{F_{I2}} = \frac{dm_3}{F_{I3}} = \frac{dn_1}{F_{I4}} \quad (2\cdot47)$$

(i) $\lambda^2 = \lambda_s^2 \equiv 2\theta_M/\alpha\rho_{11}$ の場合

$\lambda^2 = \lambda_s^2$ を $[f_{IJ}]$ の1行目の各余因子行列式に代入すると、すべてが0となるから、式(2・47)の計算を行なうのに、2行目の余因子行列式を計算し、 $\lambda^2 = \lambda_s^2$ を代入すれば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} F_{21}(\lambda_s^2) &= 0, \quad F_{22}(\lambda_s^2) = f_1 m_3^2 \\ F_{23}(\lambda_s^2) &= -f_1 m_2 m_3, \quad F_{24}(\lambda_s^2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2\cdot48)$$

なお f_1 は次式で与えられる。

$$f_1 = \frac{16}{\alpha\rho_{11}^3} \theta_{MM} \theta_M^2 - \frac{8}{\alpha\rho_{11}^2} \theta_{MM} \theta_M \left(\frac{1}{\rho_{11}} \theta_{mm} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} \theta_{mn} + \frac{1}{\rho_{22}} \theta_{nn} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8}{\alpha \rho_{11}^3} \theta_{mM}^2 \theta_M + \frac{8}{\alpha \rho_{11}^2 \rho_{22}} \theta_{Mn}^2 \theta_M + \frac{4}{\rho_{11}^2 \rho_{22}} \theta_{MM} (\theta_{mm} \theta_{nn} - \theta_{mn}^2) \\
& + \frac{4}{\rho_{11}^2 \rho_{22}} (2 \theta_{mM} \theta_{Mn} \theta_{mn} - \theta_{mM}^2 \theta_{nn} - \theta_{Mn}^2 \theta_{mm})
\end{aligned} \quad (2.49)$$

式(2.48)を式(2.47)に代入し積分を行なうと次式をうる。

$$m_1 = c_1, \quad m_2^2 + m_3^2 = M = c_2^2, \quad n_1 = c_3 \quad (2.50)$$

一方, $\theta_M = \theta_M(m_1, n_1, M)$ であったから, $\lambda = \lambda_s$ の場合, θ_M は一定値をとりすべての特性曲線は同じ勾配をもつ直線群となる。この場合, 弾性相の変位勾配ベクトル $\{m_I\}$ は一定の大きさ

$$(m_1^2 + M)^{1/2} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

をもち, 波動の伝播方向の成分が c_1 なる一定値をとる。また波動の伝播方向に直交する面内の成分は任意の方向を向くが, その大きさは c_2 なる一定値をもつ。これから, 補助変数 φ を用いて次式のように m_2, m_3 を表わすことができる。

$$m_2 = c_2 \cos \varphi, \quad m_3 = c_2 \sin \varphi \quad (2.51)$$

これらのことから, $\lambda = \lambda_s$ なる場合の波は円偏波になっていることがわかる。なお, 流体相の変位勾配ベクトルは波動の伝播する方向を向き, かつ, その方向に一定値 c_3 を保持する。図2.1は以上の関係を示したものである。

もしかりに境界上で $c_1 = c_3 = 0$ なる条件が与えられれば, ひずみは弾性相のみに起り, 波動の伝播方向に直角な面内だけに発生するから, $\lambda = \lambda_s$ の波動は弾性相を伝播するせん断波ということができる。なおこの場合, 圧縮ひずみの発生を伴わないから, 円偏波形のせん断波は独立に存在することもわかる。

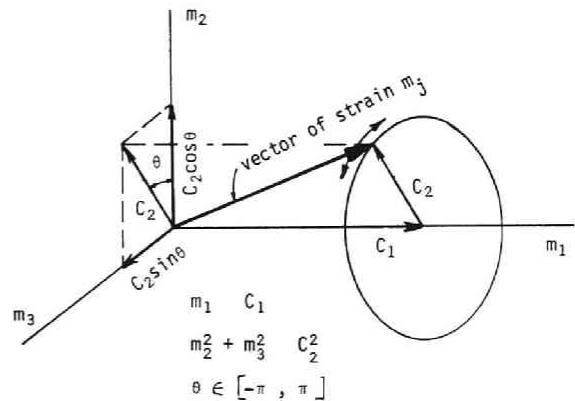


図 2.1 円偏波における弾性相のひずみ場

(ii) λ^2 が式 (2・42) から求まる場合

いま式 (2・42) から得られる根を大きさの順に $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$ とおくと、この場合は(i)で行なったように、 λ_i^2 ($i=1, 2, 3$) の形が簡単に求まらないから、一般的な考察を行なうことはできないが、若干の演算の結果次のようなことが明らかになる。まず、 $[f_{IJ}]$ の4行目の余因子行列式を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F_{41} &= \left(\alpha \lambda^2 - \frac{2\theta_M}{\rho_{11}} \right) \left[\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \alpha \lambda^4 - \left\{ \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} (4M\theta_{MM} + 2\theta_M) + \alpha\theta_{mn} \right\} \frac{1}{\rho_{11}} \lambda^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho_{11}^2} (2M\theta_{MM}\theta_{mn} + \theta_M\theta_{mn} - 2M\theta_{mM}\theta_{Mn}) \right] \\ F_{42} &= -\frac{m_2}{\rho_{11}} \left(\alpha \lambda^2 - \frac{2\theta_M}{\rho_{11}} \right) \left\{ \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \theta_{mM} - \theta_{MM} \right) \lambda^2 - \frac{1}{\rho_{11}} (\theta_{mM}\theta_{mn} - \theta_{Mn}\theta_{mm}) \right\} \\ F_{43} &= -\frac{m_3}{\rho_{11}} \left(\alpha \lambda^2 - \frac{2\theta_M}{\rho_{11}} \right) \left\{ \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \theta_{mM} - \theta_{MM} \right) \lambda^2 - \frac{1}{\rho_{11}} (\theta_{mM}\theta_{mn} - \theta_{Mn}\theta_{mm}) \right\} \\ F_{44} &= -\left(\alpha \lambda - \frac{2\theta_M}{\rho_{11}} \right) \left[\alpha \lambda^4 - \frac{1}{\rho_{11}} (\alpha\theta_{mn} + 4M\theta_{MM} + 2\theta_M) \lambda^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\rho_{11}^2} (2M\theta_{mM}\theta_{MM} + \theta_{mM}\theta_M - 2M\theta_{mM}^2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2\cdot52)$$

式 (2・52) を式 (2・47) に代入することにより式 (2・53) ~ (2・55) をうる。

$$\frac{dm_3}{dm_2} = \frac{m_3}{m_2} \quad (2\cdot53)$$

$$\frac{dm_2}{dm_1} = \frac{-\frac{m_2}{\rho_{11}} \left\{ \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \theta_{mM} - \theta_{MM} \right) \lambda^2 - \frac{1}{\rho_{11}} (\theta_{mM}\theta_{mn} - \theta_{Mn}\theta_{mm}) \right\}}{\left[\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \alpha \lambda^4 - \left\{ \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} (4M\theta_{MM} + 2\theta_M) + \alpha\theta_{mn} \right\} \frac{\lambda^2}{\rho_{11}} + \frac{1}{\rho_{11}^2} (2M\theta_{MM}\theta_{mM} + \theta_M\theta_{mn} - 2M\theta_{mM}\theta_{Mn}) \right]} \quad (2\cdot54)$$

$$\frac{dn_1}{dm_1} = \frac{-\left\{ \alpha \lambda^4 - \frac{1}{\rho_{11}} (\alpha\theta_{mn} + 4M\theta_{MM} + 2\theta_M) \lambda^2 + \frac{2}{\rho_{11}^2} (2M\theta_{mM}\theta_{MM} + \theta_{mM}\theta_M - 2M\theta_{mM}^2) \right\}}{\left[\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \alpha \lambda^4 - \left\{ \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} (4M\theta_{MM} + 2\theta_M) + \alpha\theta_{mn} \right\} \frac{\lambda^2}{\rho_{11}} + \frac{1}{\rho_{11}^2} (2M\theta_{mM}\theta_{mM} + \theta_{mM}\theta_{mn} - 2M\theta_{mM}\theta_{Mn}) \right]} \quad (2\cdot55)$$

式 (2・53) より次式をうる。

$$\frac{m_2}{m_3} = \text{const.} = \phi \quad (2.56)$$

式(2.56)は弾性相の変位勾配のうち波面に平行な面内の成分が常に同一方向を向いていることを表わしている。すなわち、弾性相の変位勾配ベクトルは波動の伝播する方向(この場合は X_1 軸)を含む面内にあることになる。これらのことから、 $\lambda = \lambda_i (i=1, 2, 3)$ なる場合の波は平面偏波になっていることがわかる。この関係を示したのが図2.2である。式(2.56)はすべての $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ について成立する式で

あるから、以上に述べたことは流体相を圧縮波が伝播するとき($\lambda = \lambda_1$ に相当)、弾性相を圧縮波が伝播するとき($\lambda = \lambda_2$ に相当)、弾性相をせん断波が伝播するとき($\lambda = \lambda_3$ に相当)のいずれの場合にも成立することになる。

式(2.54)、(2.55)を解くためには $\lambda_i^2 (i=1, 2, 3)$ の値が式(2.42)より解析的に求まらなければならないが、簡単に求めることはできない。

ここでは、ひずみエネルギー W をひずみ不変量によりテーラー展開し、 λ_i^2 の近似値を求め、これを用いて考察を加えることにする。式(2.19)をひずみ不変量で4次のオーダーまで展開すれば次式となる。

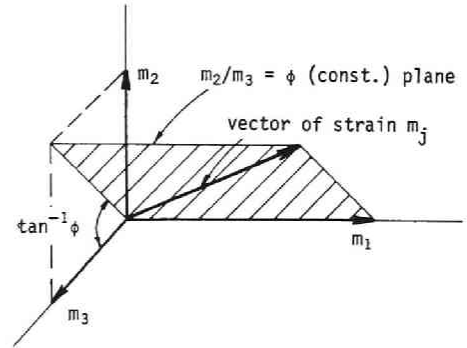


図2.2 平面偏波における弾性相のひずみ場

$$\begin{aligned} W = & p_0^E I + p_0^F (I_{VF} - 1) + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) I^2 - 2\mu II + \ell I^3 \\ & + m I II + n III + \epsilon_1 I^4 + \epsilon_2 I^2 II + \epsilon_3 II^2 + \epsilon_4 I III \\ & + R I (I_{VF} - 1) + \frac{1}{2} Q (I_{VF} - 1)^2 + A_1 (I_{VF} - 1)^3 + A_2 (I_{VF} - 1)^4 \\ & + \tau_1 II (I_{VF} - 1) + \tau_2 I^2 (I_{VF} - 1) + \tau_3 I (I_{VF} - 1)^2 \\ & + \tau_4 III (I_{VF} - 1) + \tau_5 II (I_{VF} - 1)^2 + \tau_6 I II (I_{VF} - 1) \\ & + \tau_7 I (I_{VF} - 1)^3 + \tau_8 I^3 (I_{VF} - 1) + \dots \end{aligned} \quad (2.57)$$

ただし、 $I^{(1)}$, $II^{(1)}$, $III^{(1)}$ を単に I , II , III と記した。また p_0^E , p_0^F はひずみが0のときの弾性相の応力と流体圧、 λ , μ , ℓ , m , n , ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 , ϵ_4 は弾性相の弾性定数、 Q , A_1 , A_2 は流体相の体積弾性定数、 R , τ_1 , τ_2 , \dots , τ_8 は流体相と弾性相の変形のカップリングを表わす定数である。なお、 λ , μ は線形弾性体のラーメの定数、 Q は線形流体の体積弾性率に相当する定数で

ある。一方、ここで考えているような変形場では、各ひずみ不変量は、式(2・25)より、 m_1 、 M 、 n_1 で表示できるから、 W をひずみ不変量で展開するかわりに、 m_1 、 M 、 n_1 により4次のオーダーまでテーラー展開してもよい、これは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} W = & a_1 m_1 + a_2 m_1^2 + a_3 m_1^3 + a_4 m_1^4 + b_2 M + b_4 M^2 + e_{12} m_1 M + e_{22} m_1^2 M \\ & + f_1 n_1 + f_2 n_1^2 + f_3 n_1^3 + f_4 n_1^4 + c_{11} m_1 n_1 + c_{12} m_1 n_1^2 + c_{21} m_1^2 n_1 + c_{22} m_1^2 n_1^2 \\ & + c_{31} m_1^3 n_1 + c_{13} m_1 n_1^3 + d_{21} M n_1 + d_{22} M n_1^2 + d_{31} m_1 n_1 M + \dots \end{aligned} \quad (2 \cdot 58)$$

各相のひずみが0のとき物体内に応力が発生していないと考えれば、 W の展開における1次の項がなくなるから

$$p_0^E = 0, \quad p_0^F = 0 \quad \text{あるいは} \quad a_1 = 0, \quad f_1 = 0 \quad (2 \cdot 59)$$

とおける。以下の解析ではこの仮定を用いる。なお、砂に対して式(2・57)を用いて、静的な構成式を実験的に求めた著者の研究²³⁾によれば、 W を4次のオーダーまで展開すればピーク応力まで十分な精度をもって追跡できることがわかっているから、4次のオーダーの展開はかなりの適応性をもつものといえる。

なお、この場合式(2・57)と(2・58)の係数の間には次式の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu), \quad a_3 = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) + \ell, \quad a_4 = \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu) + \frac{3}{2}\ell + \epsilon_1, \\ b_2 &= \frac{1}{2}\mu, \quad b_4 = \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu) - \frac{1}{8}m + \frac{1}{16}\epsilon_3, \quad e_{12} = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) - \frac{1}{4}m, \\ e_{22} &= \frac{1}{4}(\lambda + 2\mu) + \frac{3}{2}\ell - \frac{1}{8}m - \frac{1}{4}\epsilon_2, \quad f_2 = \frac{1}{2}Q, \quad f_3 = -\frac{Q}{4} + A_1, \\ f_4 &= -\frac{9}{8}Q - \frac{3}{2}A_1 + A_2, \quad c_{11} = R, \quad c_{12} = -\frac{1}{2}R + r_3, \quad c_{21} = \frac{1}{2}R + r_2, \\ c_{13} &= -R + r_7, \quad c_{22} = -\frac{1}{4}R - \frac{1}{2}r_2 + \frac{1}{2}r_3, \quad c_{31} = r_2 - r_3 + r_8, \\ d_{21} &= \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}r_1, \quad d_{22} = -\frac{1}{2}R + \frac{1}{8}r_1 + \frac{1}{2}r_3 - \frac{1}{4}r_5, \quad d_{31} = r_2 - \frac{1}{4}r_6 \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 60)$$

式(2・58)、(2・59)を式(2・32)に代入すれば次式をうる。

$$\theta_{mm} = 2a_2 + 6a_3 m_1 + 12a_4 m_1^2 + 2e_{22} M + 2c_{21} n_1 + 2c_{22} n_1^2 + 6c_{31} m_1 n_1 \quad \Bigg|$$

$$\left.
\begin{aligned}
\theta_{nn} &= c_{11} + 2c_{12}n_1 + 2c_{21}m_1 + 3c_{13}n_1^2 + 4c_{22}m_1n_1 + 3c_{31}m_1^2 + d_{31}M \\
\theta_{nn} &= 2f_2 + 6f_3n_1 + 12f_4n_1^2 + 2d_{22}M + 2c_{12}m_1 + 2c_{22}m_1^2 + 6c_{13}m_1n_1 \\
\theta_{mM} &= e_{12} + 2e_{22}m_1 + d_{31}n_1 \\
\theta_{nM} &= d_{21} + 2d_{22}n_1 + d_{31}m_1, \quad \theta_{MM} = 2b_4
\end{aligned}
\right\} \quad (2.61)$$

式(2.61)を式(2.43)に代入し式(2.42)を λ^2 について解くが、式(2.61)の各項が2次のオーダーであるから λ^2 のオーダーとしては2次まであれば十分である。したがって次式をうる。

$$\left.
\begin{aligned}
\lambda_1^2 &= \alpha_1 + \alpha_2m_1 + \alpha_3n_1 + \alpha_4m_1^2 + \alpha_5n_1^2 + \alpha_6M + \alpha_7m_1n_1 \\
\lambda_2^2 &= \beta_1 + \beta_2m_1 + \beta_3n_1 + \beta_4m_1^2 + \beta_5n_1^2 + \beta_6M + \beta_7m_1n_1 \\
\lambda_3^2 &= \tau_1 + \tau_2m_1 + \tau_3n_1 + \tau_4m_1^2 + \tau_5n_1^2 + \tau_6M + \tau_7m_1n_1
\end{aligned}
\right\} \quad (2.62)$$

なお、各 $\alpha_i, \beta_i, \tau_i$ ($i=1, \dots, 7$)は式(2.61)の展開項の係数ならびに式(2.13)に現われる密度係数の複雑な関数であり、付録2-Bの式(B-1)～(B-13)で与えられる。

式(2.62)の λ_i^2 ($i=1, 2, 3$)を式(2.54), (2.55)に代入し、式(2.53)を考慮すれば次式をうる。

$$\frac{dm_2}{dm_1} = \frac{m_2(h_{0i} + h_{1i}m_1 + h_{2i}n_1)}{g_{0i} + g_{1i}m_1 + g_{2i}n_1 + g_{3i}m_1^2 + g_{4i}n_1^2 + g_{5i}m_1n_1 + g_{6i}m_2^2} \quad (2.63)$$

$$\frac{dm_2}{dn_1} = \frac{m_2(h_{0i} + h_{1i}m_1 + h_{2i}n_1)}{k_{0i} + k_{1i}m_1 + k_{2i}n_1 + k_{3i}m_1^2 + k_{4i}n_1^2 + k_{5i}m_1n_1 + k_{6i}m_2^2} \quad (2.64)$$

$$\frac{dn_1}{dm_1} = \frac{k_{0i} + k_{1i}m_1 + k_{2i}n_1 + k_{3i}m_1^2 + k_{4i}n_1^2 + k_{5i}m_1n_1 + k_{6i}m_2^2}{g_{0i} + g_{1i}m_1 + g_{2i}n_1 + g_{3i}m_1^2 + g_{4i}n_1^2 + g_{5i}m_1n_1 + g_{6i}m_2^2} \quad (2.65)$$

ここに、 $g_{0i}, g_{1i}, \dots, g_{6i}, k_{0i}, k_{1i}, \dots, k_{6i}, h_{0i}, h_{1i}, h_{2i}$ は λ_i^2 を式(2.54), (2.55)に代入したときに求まる係数で、式(2.13)で定義した密度係数ならびに式(2.62)で定義される λ_i^2 の展開項の係数からなる複雑な関数で、付録2-Cの式(C-1)～(C-4)で与えられるものである。

式(2.63), (2.64), (2.65)は非線形の連立常微分方程式であり、このままでは簡単に積分できないため、解の特性を調べることができない。いま、ひずみエネルギーの展開を3次のオーダーまでとすれば、これら3式は次式のように書きなおせる。

$$\frac{dm_2}{dm_1} = \frac{h_{0i} m_2}{g_{0i} + g_{1i} m_1 + g_{2i} n_1} \quad (2.66)$$

$$\frac{dm_2}{dn_1} = \frac{h_{0i} m_2}{k_{0i} + k_{1i} m_1 + k_{2i} n_1} \quad (2.67)$$

$$\frac{dn_1}{dm_1} = \frac{k_{0i} + k_{1i} m_1 + k_{2i} n_1}{g_{0i} + g_{1i} m_1 + g_{2i} n_1} \quad (2.68)$$

いま変形が小さい場合を考えると

$$\left. \begin{aligned} g_{0i} &\gg g_{1i} m_1 + g_{2i} n_1 \\ k_{0i} &\gg k_{1i} m_1 + k_{2i} n_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

が成立すると考えられるから、式(2.68)は次式のように表わされる。なお以下式(2.77)までに対して総和規約は用いない。

$$\frac{dn_1}{dm_1} = \frac{k_{0i}}{g_{0i}} + \left(\frac{k_{1i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i} g_{1i}}{g_{0i}^2} \right) m_1 + \left(\frac{k_{2i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i} g_{2i}}{g_{0i}^2} \right) n_1 + \dots \quad (2.70)$$

この式を積分し $n_1 \sim m_1$ の関係を求めると次式のようになる。

$$n_1 = A_i + B_i m_1 + O(m_1^2) \quad (2.71)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_i &= C_0 - \left\{ \frac{k_{0i}}{g_{0i}} \left(\frac{k_{2i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i} g_{2i}}{g_{0i}^2} \right) + \frac{k_{1i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i} g_{1i}}{g_{0i}^2} \right\} / \left(\frac{k_{2i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i} g_{2i}}{g_{0i}^2} \right)^2 \\ B_i &= C_0 \left(\frac{k_{2i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i} k_{2i}}{g_{0i}^2} \right) + \left(\frac{k_{1i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i} g_{1i}}{g_{0i}^2} \right) / \left(\frac{k_{2i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i} g_{2i}}{g_{0i}^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

であり、 C_0 は積分定数である。なお式(2.69)₁の条件が成立するためには少なくとも次式が成立しなければならない。

$$g_{0i} \gg g_{2i} A_i \quad (2.73)$$

式(2.71)を式(2.66)に代入し、式(2.69)、(2.56)を考慮すれば次式をうる。

$$m_2 = B_0 \left\{ 1 + \left(\frac{h_{0i}}{g_{0i}} - \frac{h_{0i} g_{2i}}{g_{0i}^2} A_i \right) m_1 + O(m_1^2) \right\} \quad (2.74)$$

$$m_3 = \frac{B_0}{\phi} \left\{ 1 + \left(\frac{h_{0i}}{g_{0i}} - \frac{h_{0i} g_{2i}}{g_{0i}^2} A_i \right) m_1 + O(m_1^2) \right\} \quad (2.75)$$

ここに B_0 は積分定数である。

式 (2.66), (2.67), (2.68) は n_1, m_1, m_2, m_3 が互いにいずれか 1 つの変数の関数として表示されることを示している。式 (2.71), (2.74), (2.75) は n_1, m_2, m_3 を m_1 の関数として表示したものである。同様な手法を用いれば他の場合についても計算することができる。一方、式 (2.45) の条件を満たす特性曲線は直線となり、特性曲線上では n_1, m_1, m_2, m_3 は一定値になるから (付録 2-A 参照)、境界条件として流体相あるいは弾性相の圧縮ひずみ、弾性相のせん断ひずみのいずれかが与えられれば、 X_1-t 平面内の変形はすべて求まることになる。

いま、境界条件として与えられる境界上のひずみ相互の間に次のような条件が与えられる場合を考える。

$$m_1 = 0 \quad \text{のとき} \quad n_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad m_3 = 0 \quad (2.76)$$

ここで、式 (2.71), (2.74), (2.75) を考えれば、 $n_1 = n_1(m_1)$, $m_2 = m_2(m_1)$, $m_3 = m_3(m_1)$ であるから、式 (2.76) は $n_1(0) = m_2(0) = m_3(0) = 0$ であることを意味している。この場合には、式 (2.71), (2.72), (2.74), (2.75) より積分定数 B_0, C_0 の値が次式のように与えられる。

$$C_0 = \left\{ \frac{k_{0i}}{g_{0i}} \left(\frac{k_{2i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i} g_{2i}}{g_{0i}^2} \right) + \frac{k_{1i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i} g_{1i}}{g_{0i}^2} \right\} / \left(\frac{k_{2i}}{g_{0i}} - \frac{k_{0i} g_{2i}}{g_{0i}^2} \right)^2 \quad (2.77)$$

$$B_0 = 0 \quad (2.78)$$

式 (2.78) が成立する場合は、式 (2.74), (2.75) より $m_2 \equiv m_3 \equiv 0$ が求まる。これは境界上でせん断ひずみが m_1 に独立に作用しなければ、 X_1-t 平面の全領域においてせん断ひずみが発生しないことを示している。すなわち、非線形物体においても圧縮波が独立に存在できることを意味し、著者が行なった圧縮波の伝播に関する研究結果と一致する。¹⁸⁾

また境界上のひずみ相互間に次のような条件が与えられる場合を考える。

$$m_1 = 0 \quad \text{のとき} \quad n_1 = 0, \quad m_2 \neq 0, \quad m_3 \neq 0 \quad (2.79)$$

この場合、 C_0 は式 (2.77) と同じであるが

$$B_0 \neq 0 \quad (2.80)$$

をうる。したがって式(2・74), (2・75)は $m_2 = B_0 + f(m_1)$, $m_3 = B_0 / \phi + g(m_1)$ となり, m_2 , m_3 には m_1 に独立な項がある。これは境界上で m_1 が 0 であっても, $X_1 - t$ 平面の全領域で m_1 が恒等的に 0 にならないことを表わすもので, 非線形物体では平面偏波形のせん断波は独立に存在できないことを示している。

2・4・3 波動の伝播速度

いま, ひずみが非常に小さい場合を考えれば,

$$m_1 \cong n_1 \cong M \cong 0 \quad (2 \cdot 81)$$

とおけるから, 式(2・62)は次式となる。

$$\lambda_1 \cong \pm \sqrt{\alpha_1}, \quad \lambda_2 \cong \pm \sqrt{\beta_1}, \quad \lambda_3 = \pm \sqrt{\tau_1} \quad (2 \cdot 82)$$

一方, 式(2・41)より λ_s は次式のようになる。

$$\lambda_s = \pm \sqrt{\tau_1} \quad (2 \cdot 83)$$

α_1 , β_1 , τ_1 は付録 2-B の式(B-1)で与えられるが, これに式(2・60)の関係を代入すると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} R + \frac{Q}{2\rho_{22}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} R + \frac{Q}{2\rho_{22}} \right)^2 - \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} \left\{ \frac{(\lambda + \mu)Q}{2} + R^2 \right\}} \right] \\ \beta_1 &= \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} R + \frac{Q}{2\rho_{22}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} R + \frac{Q}{2\rho_{11}} \right)^2 - \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} \left\{ \frac{(\lambda + \mu)Q}{2} + R^2 \right\}} \right] \\ \tau_1 &= \frac{\mu}{\alpha\rho_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 84)$$

以上のことから, $\lambda_1 \cong \lambda_2 \cong \lambda_3 = \lambda_s$ なる関係が得られ, 微小ひずみのもとでは流体で飽和された多孔質弾性体中を伝播する実体波が 3 組存在するという Biot⁵⁾の研究結果と一致する。それ

によれば、 $\sqrt{\alpha_1}$ は流体相を伝わる圧縮波の伝播速度を、 $\sqrt{\beta_1}$ は弾性相を伝わる圧縮波の伝播速度を、 $\sqrt{\gamma_1}$ は弾性相を伝わるせん断波の伝播速度になることがわかっているから、有限変形の問題においても、 λ_1 は流体相を伝わる圧縮波の伝播速度を、 λ_2 は弾性相を伝わる圧縮波の伝播速度を、 λ_3, λ_s は弾性相を伝わるせん断波の伝播速度を表わすものと考えることができる。なお、 λ_s^2 をひずみの 2 次のオーダーで表示すると次式となる。

$$\lambda_s^2 = r_1 + \frac{2}{\alpha \rho_{11}} (e_{12} m_1 + d_{21} n_1 + e_{22} m_1^2 + 2b_4 M + d_{31} m_1 n_1) \quad (2 \cdot 85)$$

式 (2・62)₃ ならびに式 (2・85) を比較すると、ひずみ エネルギーをひずみの 3 次以上のオーダーまで展開した場合には λ_3^2 と λ_s^2 の値は一致しなくなり、弾性相中を伝わるせん断波が 2 組存在するようになることが判明する。

2・5 結 論

本章は飽和土中を伝わる滑らかな非線形波動の性質を調べるため、実体波を対象とし、土を流体と弾性体の混合体と考え、このような物体中を伝播する単純波の特性を調べることを試みたものである。まず弾性相と流体相からなる 2 相系の運動方程式をラグランジェ関数を用い基準座標系で表示した。次に、こうして得た方程式系が全双曲形になるための条件を求めた。この場合には単純波解が存在するので、その伝播形態について考察した結果次のようなことが明らかになった。

- (1) 波動の伝播速度をひずみの関数として表示することができる。
- (2) 超弾性流体で飽和された多孔質超弾性体中を伝播する単純波は、正ならびに負の方向へ同じ速度で伝播する波動を 1 組のものと考えれば、4 組存在する。それらは流体相中を伝わる 1 組の圧縮波、弾性相中を伝わる 1 組の圧縮波と 2 組のせん断波から構成されている。
- (3) 波動の伝播形態には 2 種類あり、円偏波と平面偏波とからなっている。前者の形で伝播するのは弾性相中を伝播するせん断波の 1 組であり、残りの 3 組は後者の形で伝播する。
- (4) 平面偏波では、適当な境界条件が与えられると、流体相と弾性相を伝わる圧縮波はせん断変形をとまわずに伝播でき、非線形性を有する物体中でも圧縮波が独立に存在できる。これに対し、いかなる境界条件が与えられても、弾性相中を伝わるせん断波は流体相あるいは弾性相に体積変化を発生させるから、非線形性を有する物体中では平面偏波形のせん断波は独立に存在できない。
- (5) 一方、円偏波では、境界上での圧縮ひずみが 0 であれば、せん断形の波動が単独に伝播できる。

以上、単純波の伝播形態についての結論を述べたが、混合体中を伝播する波動をもっと詳しく研究するためには、系を支配する方程式系が熱力学的条件を含んだものになっており、かつそのような方程式系の不連続解などについて調べる必要がある。また耐震工学的見地に立てば、非線形双曲形方程式の周期解についても考察を行なわなければならない。以下の章でこのような点について若干の考察を加える。

参 考 文 献

- 1) 土質工学会編：土質工学ハンドブック、pp. 292～297、技報堂、昭和 40.
- 2) Hardin B. O. and W. L. Black : Sand Stiffness under Various Triaxial Stresses, Proc. ASCE, Vol. 92, No. SM2, pp. 27-42. 1966.
- 3) Hardin B. O. and W. L. Black : Vibration Modulus of Normally Consolidated Clay, Proc. ASCE, Vol. 94, No. SM2, pp. 353-569, 1968.
- 4) Kovacs W. D., H. B. Seed and C. K. Chan : Dynamic Moduli and Damping Ratios for a Soft Clay, Proc. ASCE, Vol. 97, No. SMI, pp. 59-75, 1971.
- 5) Biot M. A. : Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range, Jour. Acoust. Soc. Am., Vol. 28, No. 2, pp. 168-178, 1956.
- 6) Biot M. A. : Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range, Jour. Acoust. Soc. Am., Vol. 28, No. 2, pp. 178-191. 1956.
- 7) Truesdell C. : General and Exact Theory of Waves in Finite Elastic Strain, Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 8, No. 4, pp. 263-296, 1961.
- 8) Coleman B. D., M. E. Gurtin and I. R. Herrera : I. The Velocity of One-Dimensional Shock and Acceleration Waves, Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 19, pp. 1-19, 1965.
- 9) Coleman B. D. and M. E. Gurtin : II. On the Growth and Decay of One-Dimensional Acceleration Waves, Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 19, pp. 239-265, 1965.
- 10) Coleman B. D. and M. E. Gurtin : III. Theoremodynamic Influence of the Growth and Decay of Acceleration Waves, Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 19, pp. 266-298, 1965.
- 11) Coleman B. D. and M. E. Gurtin : IV. Theoremodynamics and the Velocity of General Acceleration Waves, Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 19, pp. 317-338, 1965.
- 12) Coleman B. D., J. M. Greenberg, and M. E. Gurtin : V. On the Amplitude of

Acceleration Waves and Mild Discontinuities, Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 22, pp. 333–354, 1968.

- 13) Lax P. D.: Hyperbolic Systems of Conservation Laws II, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 10, pp. 537–566, 1957.
- 14) Bland D. R. : Dilatational Waves and Shocks in Large Displacement Isentropic Dynamic Elasticity, Jour. Mech. Phys. Solids, Vol. 12, pp. 245–267, 1964.
- 15) Bland D. R. : Plane Isentropic Large Displacement Simple Waves in a Compressible Elastic Solid, ZAMP, Vol. 16, pp. 752–769, 1965.
- 16) Collins W. D. : One-Dimensional Non-linear Wave Propagation in Incompressible Elastic Materials, Quart. Jour. Mech. and Appl. Math., Vol. XIX, Pt. 3, pp. 259–328, 1966.
- 17) Howard I. C. : Finite Simple Waves in a Compressible Transversely Isotropic Elastic Solid, Quart. Jour. Mech. Appl. Math., Vol. XIX, Pt. 3, pp. 329–341, 1966.
- 18) 後藤尚男・佐藤忠信：非線形多孔質弾性体中を伝わる圧縮波の伝播速度について，昭和46年度土木学会関西支部年次学術講演会概要，pp. I-52-1～I-52-2, 1971.
- 19) 後藤尚男・佐藤忠信：飽和した多孔質弾性体中を伝播する非線形波動について，土木学会論文報告集，第209号，pp. 37～50, 1973.
- 20) Truesdell C. : The Nonlinear Field Theories in Mechanics, Topics in Nonlinear Physics, Proc. Physics Session International School of Nonlinear Mathematics and Physics, Munich 1966, Springer-Verlag, 1968.
- 21) Eringen A. C. : Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill, 1962.
- 22) Jeffrey A. and T. Taniuti : Nonlinear Wave Propagation with Application to Physics and Magnetohydrodynamics, Academic Press, 1964.
- 23) 柴田徹・佐藤忠信：砂質土の弾性定数に関する一考察，京都大学防災研究所年報，第16号B，pp. 697～710, 1973.

付録 2-A 特性曲線法による双曲形方程式の解法

いま、従属変数 u_j ($j = 1, 2, \dots, n$) が次の 1 階連立偏微分方程式を満たすものとする。

$$\sum_j^n l_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + m_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial a} = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A-1})$$

ここに、 l_{ij} , m_{ij} , c_i は独立変数 t , a ならびに従属変数 u_j の関数である。ただし u_j の微分形は含まない。このような方程式は半線形方程式と呼ばれる。この方程式系の特性曲線の勾配 $\lambda = da/dt$ はマトリックス $[m_{ij} - \lambda l_{ij}]$ の行列式を 0 とする次式によって与えられる。

$$|m_{ij} - \lambda l_{ij}| = 0 \quad (\text{A-2})$$

ここで、式 (A-1) の解として u_j が 1 個の補助変数 θ の関数 $u_j = u_j(\theta)$ となるような場合について考えると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t} &= u_j' \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial a} = u_j' \frac{\partial \theta}{\partial a} \\ \text{ただし} \quad u_j' &\equiv \frac{\partial u_j}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3})$$

をうる。式 (A-3) を式 (A-1) に代入すると次式をうる。

$$\sum_{j=1}^n l_{ij} u_j' \frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{j=1}^n m_{ij} u_j' \frac{\partial \theta}{\partial a} = c_i \quad (\text{A-4})$$

式 (A-4) の任意の i 番目の式の特性曲線の勾配 μ は次式で与えられる。

$$\mu = \frac{da}{dt} = \frac{\sum_{j=1}^n m_{ij} u_j'}{\sum_{j=1}^n l_{ij} u_j'} \quad (\text{A-5})$$

式 (A-4) はすべての i に対して成立するから、式 (A-5) もすべての i に対して成立し、したがって次式をうる。

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} - \mu l_{ij}) u_j' = 0 \quad (\text{A-6})$$

上式が $u_j' \equiv 0$ 以外に解をもつためには次式が成立しなければならない。

$$|m_{ij} - \mu l_{ij}| = 0 \quad (\text{A-7})$$

式 (A-2) と式 (A-7) は同じ式であるから、 λ と μ は 1 対 1 に対応する。

一方、 $t-a$ 平面上の任意の曲線に沿って次式が成立する。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} dt + \frac{\partial \theta}{\partial a} da = d\theta \quad (\text{A-8})$$

式 (A-4) と式 (A-8) が 1 つの特性曲線と一致するためには次式が成立すればよい

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{\sum_{j=1}^n l_{ij} u_j'}{c_i} \quad (\text{A-9})$$

式 (A-6), (A-7) より u_j' は特異マトリックス $[m_{ij} - \lambda l_{ij}]$ の固有ベクトルであり、かつ各 λ の値に対して 1 個の任意定数を含む形で求めることができる。この固有ベクトルが式 (A-4) から求まるベクトル $\{u_j'\}$ と一致するためには、式 (A-9) の右辺がすべての i に対して同じ値をもたなければならない。このような場合の解が単純波と呼ばれる。

式 (A-1) の右辺の c_i がすべての i に対して 0 である場合には、 n 個の λ のおのおのに対し $d\theta = 0$ とおくことにより式 (A-9) が成立する。すなわち、特性曲線上では $\theta = \text{const.}$ となる。したがって、 $u_i = u_i(\theta)$ も特性曲線上で一定となる。これより、式 (A-1) が全双曲形*) で同次形の場合には n 個の単純波が存在することになる。

l_{ij} ならびに m_{ij} が u_i の関数で t ならびに a に陽に関係しないときは、 l_{ij} と m_{ij} は θ のみの関数となり、式 (A-2) より λ も θ のみの関数となる。特性曲線上で θ が一定ならば λ も一定となってくる。したがって単純波の特性曲線は直線となり、その直線上で u_i は一定値を取ることになる。

u_j' がマトリックス $[m_{ij} - \lambda l_{ij}]$ の固有ベクトルであることから、 u_j' は $[m_{ij} - \lambda l_{ij}]$ のすべてが 0 でない余因子行列に比例することになる。したがって単純波はその特性曲線上で従属変数の間に次の関係式をもつことになる。

$$\frac{du_1}{A_{i1}} = \frac{du_2}{A_{i2}} = \dots\dots\dots = \frac{du_n}{A_{in}} \quad (\text{A-10})$$

*) 式 (A-1) が全双曲形になるのは、式 (A-2) の n 個の根がすべて独立な場合である。

ここに、 A_{ij} は $[m_{ij} - \lambda l_{ij}]$ の i 行の余因子行列式を表わしている。式 (A-10) は $(n-1)$ 個の独立な関係式を与える。すなわち、すべての従属変数はその中の 1 つによって表示できることになる。

付録 2-B

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\alpha} \left\{ \left(\frac{a_2}{\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{f_2}{\rho_{22}} \right) + \sqrt{\left(\frac{a_2}{\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{f_2}{\rho_{22}} \right)^2 - \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2f_2 + c_{11}^2)} \right\} \\ \beta_1 &= \frac{1}{\alpha} \left\{ \left(\frac{a_2}{\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{f_2}{\rho_{22}} \right) - \sqrt{\left(\frac{a_2}{\rho_{11}} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{f_2}{\rho_{22}} \right)^2 - \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2f_2 + c_{11}^2)} \right\} \\ r_1 &= \frac{2b_2}{\alpha\rho_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-1})$$

$$\alpha_2 = \frac{C_2 - \alpha_1 B_2 + \alpha_1^2 A_2}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - r_1)}, \quad \beta_2 = \frac{C_2 - \beta_1 B_2 + \beta_1^2 A_2}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - r_1)}, \quad r_2 = \frac{C_2 - r_1 B_2 + r_1^2 A_2}{(r_1 - \alpha_1)(r_1 - \beta_1)} \quad (\text{B-2})$$

$$\alpha_3 = \frac{C_3 - \alpha_1 B_3 + \alpha_1^2 A_3}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - r_1)}, \quad \beta_3 = \frac{C_3 - \beta_1 B_3 + \beta_1^2 A_3}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - r_1)}, \quad r_3 = \frac{C_3 - r_1 B_3 + r_1^2 A_3}{(r_1 - \alpha_1)(r_1 - \beta_1)} \quad (\text{B-3})$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{C_4 - \alpha_1 B_4 + \alpha_1^2 A_4}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - r_1)} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\alpha_2 r_2}{\alpha_1 - r_1} \\ \beta_4 &= \frac{C_4 - \beta_1 B_4 + \beta_1^2 A_4}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - r_1)} + \frac{\beta_2 \alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\beta_2 r_2}{\beta_1 - r_1} \\ r_4 &= \frac{C_4 - r_1 B_4 + r_1^2 A_4}{(r_1 - \alpha_1)(r_1 - \beta_1)} + \frac{r_2 \alpha_2}{r_1 - \alpha_1} + \frac{r_2 \beta_2}{r_1 - \beta_1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-4})$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_5 &= \frac{C_5 - \alpha_1 B_5 + \alpha_1^2 A_5}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - r_1)} + \frac{\alpha_3 \beta_3}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\alpha_3 r_3}{\alpha_1 - r_1} \\ \beta_5 &= \frac{C_5 - \beta_1 B_5 + \beta_1^2 A_5}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - r_1)} + \frac{\beta_3 \alpha_3}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\beta_3 r_3}{\beta_1 - r_1} \\ r_5 &= \frac{C_5 - r_1 B_5 + r_1^2 A_5}{(r_1 - \alpha_1)(r_1 - \beta_1)} + \frac{r_3 \alpha_3}{r_1 - \alpha_1} + \frac{r_3 \beta_3}{r_1 - \beta_1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-5})$$

$$\alpha_6 = \frac{C_6 - \alpha_1 B_6 + \alpha_1^2 A_6}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \tau_1)}, \quad \beta_6 = \frac{C_6 - \beta_1 B_6 + \beta_1^2 A_6}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - \tau_1)}, \quad \tau_6 = \frac{C_6 - \tau_1 B_6 + \tau_1^2 A_6}{(\tau_1 - \alpha_1)(\tau_1 - \beta_1)} \quad (\text{B-6})$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_7 &= \frac{C_7 - \alpha_1 B_7 + \alpha_1^2 A_7}{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \tau_1)} + \frac{\alpha_3 \tau_2 + \alpha_2 \tau_3}{\alpha_1 - \tau_1} + \frac{\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3}{\alpha_1 - \beta_1} \\ \beta_7 &= \frac{C_7 - \beta_1 B_7 + \beta_1^2 A_7}{(\beta_1 - \tau_1)(\beta_1 - \alpha_1)} + \frac{\beta_3 \tau_2 + \beta_2 \tau_3}{\beta_1 - \tau_1} + \frac{\beta_2 \alpha_3 + \alpha_2 \beta_3}{\beta_1 - \alpha_1} \\ \tau_7 &= \frac{C_7 - \tau_1 B_7 + \tau_1^2 A_7}{(\tau_1 - \alpha_1)(\tau_1 - \beta_1)} + \frac{\tau_3 \beta_2 + \tau_2 \beta_3}{\tau_1 - \beta_1} + \frac{\tau_2 \alpha_3 + \alpha_2 \tau_3}{\tau_1 - \alpha_1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-7})$$

なお、式(B-2)～(B-7)に出てくる A_i , B_i , C_i ($i = 2, 3, \dots, 7$) は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \alpha \left\{ \frac{6a_3}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{21} + \frac{2c_{12}}{\rho_{22}} + \frac{2e_{12}}{\rho_{11}} \right\} \\ B_2 &= \left[\frac{2b_2}{\rho_{11}} \left(\frac{6a_3}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{21} + \frac{c_{12}}{\rho_{22}} \right) + \frac{2e_{12}}{\rho_{11}} \left(\frac{2a_2}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{2f_2}{\rho_{22}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} (4a_2 c_{12} + 12a_3 f_2 + 4c_{11} c_{21}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-8})$$

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \left[\frac{2e_{12}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2 f_2 + c_{11}^2) + \frac{2b_2}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (4a_2 c_{12} + 12a_3 f_2 + 4c_{11} c_{21}) \right] \\ A_3 &= \alpha \left\{ \frac{2c_{21}}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{12} + \frac{12f_3}{\rho_{22}} + \frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \right\} \\ B_3 &= \left[\frac{2b_2}{\rho_{11}} \left(\frac{2c_{21}}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{12} + \frac{12f_3}{\rho_{22}} \right) + \frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \left(\frac{2a_2}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{2f_2}{\rho_{22}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} (4f_2 c_{21} + 12a_2 f_3 + 4c_{11} c_{12}) \right] \\ C_3 &= \left[\frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2 f_2 + c_{11}^2) + \frac{2b_2}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (4f_2 c_{21} + 12a_2 f_3 + 4c_{11} c_{12}) \right] \\ A_4 &= \alpha \left\{ \frac{12a_4}{\rho_{11}} - \frac{6\rho_{11}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{31} + \frac{2c_{22}}{\rho_{22}} + \frac{2e_{22}}{\rho_{11}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-9})$$

$$\begin{aligned}
B_4 = & \left[\frac{2b_2}{\rho_{11}} \left(\frac{12a_4}{\rho_{11}} - \frac{6\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{31} + \frac{2c_{22}}{\rho_{22}} \right) + \frac{2e_{12}}{\rho_{11}} \left(\frac{6a_3}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{22}\rho_{11}} c_{21} + \frac{2c_{12}}{\rho_{22}} \right) \right. \\
& \left. + \frac{e_{22}}{\rho_{11}} \left(\frac{2a_2}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{2f_2}{\rho_{22}} \right) \right] \\
C_4 = & \left[\frac{2e_{22}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2 f_2 + c_{11}^2) + \frac{2e_{12}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (4a_2 c_{12} + 12a_3 f_2 + 4c_{11} c_{21}) \right. \\
& \left. + \frac{2b_2}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (24f_2 a_4 + 4a_2 c_{22} + 12a_3 c_{21} + 4c_{12}^2 + 6c_{11} c_{13}) \right]
\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} B_4 \\ C_4 \end{aligned}} \right\} \quad (\text{B-10})$$

$$\begin{aligned}
A_5 = & \alpha \left\{ \frac{2c_{22}}{\rho_{11}} - \frac{6\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{13} + \frac{24f_4}{\rho_{22}} + \frac{2d_{22}}{\rho_{11}} \right\} \\
B_5 = & \left[\frac{2b_2}{\rho_{11}} \left(\frac{2c_{22}}{\rho_{11}} - \frac{6\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{13} + \frac{24f_4}{\rho_{22}} \right) + \frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \left(\frac{2c_{21}}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{12} + \frac{12f_3}{\rho_{22}} \right) \right. \\
& \left. + \frac{2d_{22}}{\rho_{11}} \left(\frac{2a_2}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{2f_2}{\rho_{22}} \right) \right] \\
C_5 = & \left[\frac{2d_{22}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2 f_2 + c_{11}^2) + \frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (4f_2 c_{21} + 12a_2 f_3 + 4c_{11} c_{12}) \right. \\
& \left. + \frac{2b_2}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (24a_2 f_4 + 4f_2 c_{22} + 12f_3 c_{21} + 4c_{12}^2 + 6c_{11} c_{13}) \right]
\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A_5 \\ B_5 \\ C_5 \end{aligned}} \right\} \quad (\text{B-11})$$

$$\begin{aligned}
A_6 = & \alpha \left\{ \frac{2e_{22}}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} d_{31} + \frac{2d_{22}}{\rho_{22}} + \frac{12b_4}{\rho_{11}} \right\} \\
B_6 = & \left[\frac{2b_2}{\rho_{11}} \left(\frac{2e_{22}}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} d_{31} + \frac{2d_{22}}{\rho_{22}} \right) + \frac{12b_4}{\rho_{11}} \left(\frac{2a_2}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{2f_2}{\rho_{22}} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} (4a_2 d_{22} + 4f_2 e_{22} + 2c_{11} d_{31}) - \frac{4}{\rho_{11}^2} e_{12}^2 + \frac{4}{\rho_{11}} \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} e_{12} d_{21} - \frac{4}{\rho_{11}\rho_{22}} d_{21}^2 \right] \\
C_6 = & \left[\frac{12b_4}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2 f_2 + c_{11}^2) + \frac{2b_2}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (4a_2 d_{22} + 4f_2 e_{22} + 2c_{11} d_{31}) \right. \\
& \left. - \frac{1}{\rho_{11}^2 \rho_{22}} (2f_2 e_{12}^2 - 4c_{11} e_{12} d_{21} + 2a_2 d_{21}^2) \right]
\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A_6 \\ B_6 \\ C_6 \end{aligned}} \right\} \quad (\text{B-12})$$

$$\begin{aligned}
A_7 &= \alpha \left\{ \frac{6c_{31}}{\rho_{11}} - \frac{8\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{22} + \frac{6c_{13}}{\rho_{22}} + \frac{6d_{31}}{\rho_{11}} \right\} \\
B_7 &= \left[\frac{2b_2}{\rho_{11}} \left(\frac{6c_{31}}{\rho_{11}} - \frac{8\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{22} + \frac{6c_{13}}{\rho_{22}} \right) + \frac{2e_{12}}{\rho_{11}} \left(\frac{2c_{21}}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{12} + \frac{12f_3}{\rho_{22}} \right) \right. \\
&\quad + \frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \left(\frac{6a_3}{\rho_{11}} - \frac{4\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{21} + \frac{2c_{12}}{\rho_{22}} \right) + \frac{2d_{31}}{\rho_{11}} \left(\frac{2a_2}{\rho_{11}} - \frac{2\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22}} c_{11} + \frac{2f_2}{\rho_{22}} \right) \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{\rho_{11}\rho_{22}} (12a_2c_{13} + 12f_2c_{31} + 36a_3f_3 + 12c_{12}c_{21}) \right] \\
C_7 &= \left[\frac{2d_{31}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (2a_2f_2 + c_{11}^2) + \frac{2d_{21}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (4a_2c_{12} + 12c_3f_2 + 4c_{11}c_{21}) \right. \\
&\quad + \frac{2e_{12}}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} (4f_2c_{21} + 12a_2f_3 + 4c_{11}c_{12}) + \frac{2b_2}{\rho_{11}} \frac{1}{\rho_{11}\rho_{22}} \\
&\quad \left. \cdot (12a_2c_{13} + 12f_2c_{31} + 12c_{12}c_{11}) \right]
\end{aligned} \tag{B-13}$$

付録 2-C

いま、付録 2-B で定義した $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ($j = 1, 2, \dots, 7$) を次に定義するような変数におきかえる。

$$\delta_{j1} = \alpha_j, \quad \delta_{j2} = \beta_j, \quad \delta_{j3} = \gamma_j \quad (j = 1, 2, \dots, 7) \tag{C-1}$$

式 (C-1) を用いて、本文中の式 (65) ~ (67) に現われる定数 $g_{0i}, g_{1i}, \dots, g_{6i}, k_{0i}, k_{1i}, \dots, k_{6i}, h_{0i}, h_{1i}, h_{2i}$ は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned}
g_{0i} &= \alpha \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \delta_{1i}^2 - \frac{1}{\rho_{11}} \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2b_2 + \alpha c_{11} \right) + \frac{1}{\rho_{11}^2} b_2 c_{11} \\
g_{1i} &= 2\alpha \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \delta_{1i} \delta_{2i} - \frac{1}{\rho_{11}} \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2e_{22} + 3\alpha c_{31} \right) \delta_{1i} - \frac{1}{\rho_{11}} \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2b_2 + \alpha c_{11} \right) \delta_{2i} \\
&\quad + \frac{1}{\rho_{11}^2} (2b_2 c_{21} + e_{12} c_{11})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{2i} &= 2\alpha \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \delta_{1i} \delta_{3i} - \frac{1}{\rho_{11}} \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2d_{21} + 2\alpha c_{12} \right) \delta_{1i} - \frac{1}{\rho_{11}} \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2b_2 + \alpha c_{11} \right) \delta_{3i} \\
&\quad + \frac{1}{\rho_{11}^2} (2b_2 c_{12} + d_{21} c_{11}) \\
g_{3i} &= \alpha \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} (\delta_{2i}^2 + 2\delta_{1i} \delta_{4i}) - \frac{1}{\rho_{11}} \left\{ \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2e_{22} + 3\alpha c_{31} \right) \delta_{1i} + \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2e_{12} + 2\alpha c_{21} \right) \delta_{2i} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2b_2 + \alpha c_{11} \right) \delta_{4i} \right\} + \frac{1}{\rho_{11}^2} (3b_2 c_{31} + e_{22} c_{11} + e_{12}^2) \\
g_{4i} &= \alpha \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} (\delta_{3i}^2 + 2\delta_{1i} \delta_{5i}) - \frac{1}{\rho_{11}} \left\{ \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2d_{22} + 3\alpha c_{13} \right) \delta_{1i} + \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2d_{21} + 2\alpha c_{12} \right) \delta_{3i} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2b_2 + \alpha c_{11} \right) \delta_{5i} \right\} + \frac{1}{\rho_{11}^2} (3b_2 c_{13} + d_{22} c_{11} + d_{21}^2) \\
g_{5i} &= \alpha \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} (2\delta_{2i} \delta_{3i} + 2\delta_{1i} \delta_{7i}) - \frac{1}{\rho_{11}} \left\{ \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2d_{31} + 4\alpha c_{22} \right) \delta_{1i} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2d_{21} + 2\alpha c_{12} \right) \delta_{2i} + \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2e_{12} + 2\alpha c_{21} \right) \delta_{3i} + \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2b_2 + \alpha c_{11} \right) \delta_{7i} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho_{11}^2} (2e_{12} c_{12} + 2d_{21} c_{21} + d_{31} c_{11} + 4b_2 c_{22}) \right) \\
g_{6i} &= \left[2\alpha \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \delta_{1i} \delta_{6i} - \frac{1}{\rho_{11}} \left\{ \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 12b_4 + \alpha d_{31} \right) \delta_{1i} + \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2b_2 + \alpha c_{11} \right) \delta_{6i} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho_{11}^2} (b_2 d_{31} + 2b_4 c_{11} - 8a_2 b_2 - e_{12} d_{21}) \right] (1 + \phi^2) \\
k_{0i} &= -\alpha \delta_{1i}^2 + \frac{1}{\rho_{11}} (2\alpha a_2 + b_2) \delta_{1i} - \frac{1}{\rho_{11}^2} 2a_2 b_2 \\
k_{1i} &= -2\alpha \delta_{1i} \delta_{2i} + \frac{1}{\rho_{11}} \{ (6\alpha a_3 + 2e_{12}) \delta_{1i} + (2\alpha a_2 + 2b_2) \delta_{2i} \} - \frac{1}{\rho_{11}^2} (6b_2 a_3 + 2a_2 e_{12}) \\
k_{2i} &= -2\alpha \delta_{1i} \delta_{3i} + \frac{1}{\rho_{11}} \{ (2\alpha c_{21} + 2d_{21}) \delta_{1i} + (2\alpha a_2 + 2b_2) \delta_{3i} \} - \frac{1}{\rho_{11}^2} (2b_2 c_{21} + 2a_2 d_{21}) \\
k_{3i} &= -\alpha (\delta_{2i}^2 + 2\delta_{1i} \delta_{4i}) + \frac{1}{\rho_{11}} \{ (12\alpha a_4 + 2e_{22}) \delta_{1i} + (2\alpha a_2 + 2b_2) \delta_{4i} \}
\end{aligned}
\tag{C-2}$$

$$\begin{aligned}
& + (6\alpha a_3 + 2e_{12})\delta_{2i} \} - \frac{1}{\rho_{11}^2} (12b_2 a_4 + 2a_2 e_{22} + 6a_3 e_{12}) \\
k_{4i} = & -\alpha(\delta_{3i}^2 + 2\delta_{1i}\delta_{5i}) + \frac{1}{\rho_{11}} \{ (2\alpha c_{22} + 2d_{22})\delta_{1i} + (2\alpha a_2 + 2b_2)\delta_{5i} \\
& + (2\alpha c_{21} + 2d_{21})\delta_{3i} \} - \frac{1}{\rho_{11}^2} (2b_2 c_{22} + 2a_2 d_{22} + 2d_{21} c_{21}) \\
k_{5i} = & -2\alpha(\delta_{2i}\delta_{3i} + \delta_{1i}\delta_{7i}) + \frac{1}{\rho_{11}} \{ (6\alpha c_{31} + 2d_{31})\delta_{1i} + 2(\alpha a_2 + b_2)\delta_{7i} \\
& + 2(3\alpha a_3 + e_{12})\delta_{3i} + 2(\alpha c_{21} + d_{21})\delta_{2i} \} - \frac{1}{\rho_{11}^2} (6b_2 c_{31} + 2a_2 d_{31} \\
& + 6a_3 d_{21} + 2e_{12} c_{21}) \\
k_{6i} = & [-2\alpha\delta_{1i}\delta_{6i} + \frac{1}{\rho_{11}} \{ (2\alpha e_{22} + 12b_4)\delta_{1i} + 2(\alpha a_2 + b_2)\delta_{6i} \} \\
& - \frac{1}{\rho_{11}^2} 2(b_2 e_{22} + 2a_2 b_4 + 4b_4 a_2 - e_{12}^2)] (1 + \phi^2) \\
h_{0i} = & -\frac{1}{\rho_{11}} \{ (\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} e_{12} - d_{21})\delta_{1i} - \frac{1}{\rho_{11}} (e_{12} c_{11} - 2d_{21} a_2) \\
h_{1i} = & -\frac{1}{\rho_{11}} \{ (\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} 2e_{22} - d_{31})\delta_{1i} + (\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} e_{12} - d_{21})\delta_{2i} \\
& - \frac{2}{\rho_{11}} (e_{12} c_{21} + e_{22} c_{11} - 3d_{21} a_3 - d_{31} a_2) \} \\
h_{2i} = & -\frac{1}{\rho_{11}} \{ (\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} d_{31} - 2d_{22})\delta_{1i} + (\frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} e_{12} - d_{21})\delta_{3i} \\
& - \frac{1}{\rho_{11}} (2e_{12} c_{12} + d_{13} c_{11} - 2d_{21} c_{21} - 4d_{22} a_2) \}
\end{aligned}
\tag{C-3}$$

$$\begin{aligned}
& \tag{C-4}
\end{aligned}$$

第3章 地盤中を伝播する不連続面

3・1 概 説

前章で、地盤構成土中を伝播する非線形波動の性質を調べるために、土を流体で飽和された非線形多孔質弾性体からなる2相混合体と考え、このような物体中を伝播する単純波について調べた。単純波は運動を支配する双曲形方程式の解のうち時間と空間に関して滑らかなものであり、特性曲線上での Riemann 不変量が一定値になるようなものであった。しかし、非線形性を有する方程式では、時間と空間の全領域にわたって滑らかな解の得られないことが多い。したがって2相混合体中を伝播する波動の性質を詳しく知るためには、このような物体中を伝播する不連続面の性質について調べることが必要になる。このような観点から、本章では2相系の物体中を伝播する2次の不連続面について考察を加える。この波動は加速度波と呼ばれ、波面 (wave front) において、これを横切る方向の変位の2階微係数に不連続性をもつ波である。

いま速度場を考えて、単純波、加速度波ならびに衝撃波の波面における速度の滑らかさの度合を示したのが図3・1である。衝撃波は波面において速度に不連続が発生するものであり、加速度波とは、速度は連続であるがその1回微分に不連続が発生するものであり、単純波は波面において速度が滑らかなものであることを表わしている。

1相系の物体中を伝播する非線形波動については数多くの研究があり、その主な研究手法は次のようなものと考えられる。

- (i) 物体中を伝播する2次以上の不連続面について研究する方法^{1~16)}
- (ii) 有限変形を受けている物体中の重ね合わされた微小平面波を研究する方法^{17,18)}
- (iii) 衝撃波ならびに単純波について研究する方法^{19~28)}

これら研究手法のうち(i)に関するものは、近年まであまり注目されていなかったが、2次以上の不連続面を取り扱うと、非線形性を有する物体でも波面の運動が解析的に表示できることから、この十数年間、弾性体、粘弾性体、弾塑性体あるいは fading memory を有する物体中を伝播する2次以上の不連続面の研究が詳しくなされるようになった。

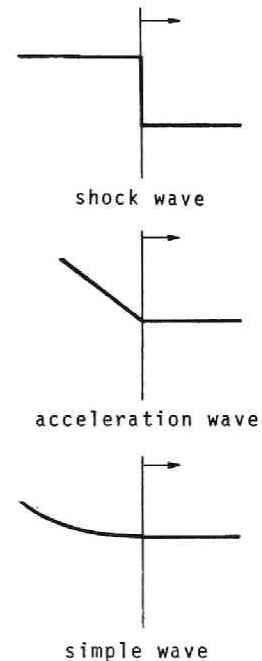


図3.1 波面における各波動の不連続性 (速度場を対象)

不連続面の幾何学的、運動学的性質を最初に研究したのは Hardamard¹⁾ である。この研究結果を用い Ericksen²⁾ は非圧縮性の超弾性体中の 2 次以上の不連続面の伝播速度について考察を加えた。Truesdell³⁾ は弾性体中を伝わる 2 次以上の不連続面の一般的な理論を展開している。Green⁴⁾ は均一な変形を受けている弾性体中を伝播する加速度波の振幅の消長について研究を行なった。Chen^{5,6)} は等方弾性体中を、Bowen と Wang⁷⁾ は不均質な弾性体中を伝播する加速度波の消長について研究した。Colemann と Gurtine は fading memory を有する物体中の加速度波の 1 次元ならびに 3 次元の伝播速度を求め^{8,9)}、1 次元の加速度波の振幅の消長について詳しい考察を行なっている^{10~12)}。その後、非線形粘弾性流体中の定常なせん断波の安定性についての解析を行なっている¹³⁾。徳岡¹⁴⁾ は一般化された Prandtl-Reuses 形の塑性体中の加速度波の消長を調べている。なお加速度波の数理的性質は Bailey と Chen^{15,16)} が詳しく述べている。

1 相系における不連続面の伝播に関しては以上のようにかなり詳しく研究されているが、多相系については、化学反応を有する弾性体からなる混合体中の 1 次元加速度波の伝播速度を求めた Bowen の研究²⁹⁾ と理想流体の混合した物体中を伝播する 1 次元加速度波の振幅の消長を考察した Bowen と Chen の研究³⁰⁾ があるが、3 次元の考察ならびに構成関係に速度勾配が入るときの一般的な考察は行なわれていないようである。このような点を考慮し、2 相混合体中を伝播する加速度波について著者は若干の研究を行なってきた^{31,32)}。本章では Naghdi 等^{33,34)} が求めた 2 相系の釣合式と構成関係を用い、2 相混合体中を伝播する 3 次元の加速度波の性質を調べる。

3・2 2 相混合体の運動量の釣合式、エネルギーの釣合式ならびに構成関係

ここで用いる基本式は Naghdi 等のものと同じであるから以下に簡単に示す。

2 相混合体の構成要素を $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) で表わし、 $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ の基準配位 (reference configuration) での粒子位置を $X_I^{(\alpha)}$ で表わし、時刻 τ における粒子位置を $x_i^{(\alpha)}(\tau)$ で表わすものとすれば次式をうる。ただし、用いる座標系はすべて直交直線座標系とする。

$$x_i^{(\alpha)}(\tau) = x_i^{(\alpha)}(X_1^{(\alpha)}, X_2^{(\alpha)}, X_3^{(\alpha)}, \tau) \quad (-\infty < \tau \leq t) \quad (3 \cdot 1)$$

なお、すべてのラテン文字の添字は 1, 2, 3 の値を取り、特に断わらないかぎりラテン文字の添字については総和規約を適用する。ギリシャ文字 α, β は混合体の α, β 番目の構成相を示すのに用いる。

一方、流通配位 (current configuration) での粒子位置 $x_i^{(\alpha)}(t)$ を用いて、式 (3・1) を書きな

おすと次式をうる。

$$x_i^{(\alpha)}(\tau) = x_i^{(\alpha)}(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, x_3^{(\alpha)}, \tau, t) \quad (-\infty < \tau \leq t) \quad (3.2)$$

ただし,

$$x_i^{(\alpha)} = x_i^{(\alpha)}(t) \quad (3.3)$$

ここで用いる混合体の理論では、時刻 t において各相の粒子が同じ位置を占めると仮定されているから、いま粒子位置を x_i とすれば次式をうる。

$$x_i = x_i^{(1)} = x_i^{(2)} \quad (3.4)$$

時刻 t における $\Delta^{(\alpha)}$ 内の x_i 点における速度ベクトル $v_i^{(\alpha)}$ は次式で与えられる。

$$v_i^{(\alpha)} = \frac{D^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)}}{Dt} \quad (3.5)$$

ここに、 $D^{(\alpha)}/Dt$ は物質微分とよばれ $\Delta^{(\alpha)}$ において $X_K^{(\alpha)}$ を固定したまま t に関して微分することを意味し次式のように表わされる。

$$\frac{D^{(\alpha)}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_m^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_m} \quad (3.6)$$

時刻 t における加速度 $f^{(\alpha)}$ は次式のようになる。

$$f_i^{(\alpha)} = \frac{D^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)}}{Dt} \quad (3.7)$$

また、時刻 t における $\Delta^{(\alpha)}$ の変形速度テンソル $d_{ik}^{(\alpha)}$ ならびにスピテンソル $\omega_{ik}^{(\alpha)}$ は次式のよ
うに定義される。

$$2d_{ik}^{(\alpha)} = v_{i,k}^{(\alpha)} + v_{k,i}^{(\alpha)}, \quad 2\omega_{ik}^{(\alpha)} = v_{i,k}^{(\alpha)} - v_{k,i}^{(\alpha)} \quad (3.8)$$

ここに、 $(\)_{,k}$ は $\partial(\)/\partial x_k$ を表わすものとする。

いま時刻 t における $\Delta^{(\alpha)}$ の密度を $\rho^{(\alpha)}$ で表わし、混合体の平均速度を v_i とし混合体としての密度を ρ とすれば次式をうる。

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^2 \rho^{(\alpha)} \quad (3.9)$$

$$\rho v_i = \sum_{\alpha=1}^2 \rho^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} \quad (3.10)$$

いま

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_m \frac{\partial}{\partial x_m} \quad (3 \cdot 11)$$

とおけば、次式をうる。

$$\rho \frac{D}{Dt} = \sum_{\alpha=1}^2 \rho^{(\alpha)} \frac{D^{(\alpha)}}{Dt} \quad (3 \cdot 12)$$

(1) 運動量の釣合式

2相系の運動量の釣合式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \pi_i &= \rho^{(2)}(f_i^{(2)} - G_i^{(2)}) - \sigma_{ki,k}^{(2)} + \frac{1}{2} m_1 v_i^{(1)} + \frac{1}{2} m_2 v_i^{(2)} \\ -\pi_i &= \rho^{(1)}(f_i^{(1)} - G_i^{(1)}) - \sigma_{ki,k}^{(1)} + \frac{1}{2} m_1 v_i^{(1)} + \frac{1}{2} m_2 v_i^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 13)$$

ここに、 π_i は拡散力と呼ばれ相相互の間でやりとりされる力、 $\rho^{(\alpha)} G_i^{(\alpha)}$ は $\Delta^{(\alpha)}$ の物体力、 m_α は化学反応などにより単位時間内に $\Delta^{(\alpha)}$ の単位質量当りに発生する $\Delta^{(\alpha)}$ の質量。したがって質量の保存則は次式で与えられる。

$$m_\alpha = \frac{D^{(\alpha)} \rho^{(\alpha)}}{Dt} + \rho^{(\alpha)} v_{k,k}^{(\alpha)} = \frac{\partial \rho^{(\alpha)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho^{(\alpha)} v_k^{(\alpha)}) \quad (3 \cdot 14)$$

角運動量の釣合式より応力の対称性に関する条件式が次式のように与えられる。

$$\sigma_{ki}^{(1)} + \sigma_{ki}^{(2)} = \sigma_{ik}^{(1)} + \sigma_{ik}^{(2)} \quad (3 \cdot 15)$$

(2) エネルギーの釣合式

混合体の局所的なエネルギーの釣合式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \rho r - q_{k,k} + \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} + \pi_i (v_i^{(1)} - v_i^{(2)}) + \frac{1}{2} (\sigma_{ki}^{(1)} + \sigma_{ik}^{(1)}) d_{ik}^{(1)} \\ + \frac{1}{2} (\sigma_{ki}^{(2)} + \sigma_{ik}^{(2)}) d_{ik}^{(2)} + \frac{1}{2} (\sigma_{ki}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(1)}) (\omega_{ik}^{(1)} - \omega_{ik}^{(2)}) = 0 \end{aligned} \quad (3 \cdot 16)$$

ここに、 r は混合体の単位質量単位時間当りの熱供給量、 q_k は混合体の熱束ベクトル、 ε は混合体単位質量当りの内部エネルギーを表わす。

(3) 構成関係

混合体の構成関係は次式のように仮定される。

$$\left.
\begin{aligned}
\varepsilon &= \varepsilon(T, F_{iJ}^{(\alpha)}) \\
P_{Lk}^{(\alpha)} &= P_{Lk}^{(\alpha)}(T, F_{iJ}^{(\beta)}, \dot{F}_{iJ}^{(\beta)}, v_i) \\
\pi_k &= \pi_k(T, F_{iJ}^{(\alpha)}, \dot{F}_{iJ}^{(\alpha)}, v_i) \\
q_k &= q_k(T, F_{iJ}^{(\alpha)}, \dot{F}_{iJ}^{(\alpha)}, v_i, g_i)
\end{aligned}
\right\} \quad (3 \cdot 17)$$

ここに、 T は混合体の平均温度、 $F_{iJ}^{(\alpha)}$ は $\Delta^{(\alpha)}$ の変位こう配、 $\dot{F}_{iJ}^{(\alpha)}$ は $\Delta^{(\alpha)}$ の速度こう配、 $(\dot{})^{(\alpha)}$ は $D^{(\alpha)}()^{(\alpha)}/Dt$ を表わし、 v_i は相対速度 ($=v_i^{(1)}-v_i^{(2)}$)、 g は温度こう配 ($=\text{grad } T$)、 $P_{Lk}^{(\alpha)}$ は Piola-Kirchhoff の応力テンソルである。なお $P_{Lk}^{(\alpha)}$ と $\sigma_{Lk}^{(\alpha)}$ との間にはつぎの関係式が成立する。

$$\sigma_{Lk}^{(\alpha)} = \frac{\rho^{(\alpha)}}{\rho_0^{(\alpha)}} x_{l,M}^{(\alpha)} P_{Mk}^{(\alpha)} \quad (3 \cdot 18)$$

ここに、 $\rho_0^{(\alpha)}$ は $\Delta^{(\alpha)}$ の基準配位での密度、 $()_{,M}^{(\alpha)}$ は $\partial()^{(\alpha)}/\partial X_M^{(\alpha)}$ を表わすものとする。

3・3 加速度波の振幅に関する一般的性質

不連続面に対する Hadamard の定理¹⁾ より $\Delta^{(\alpha)}$ 内の不連続面に沿って次式をうる。

$$\frac{d}{dt} [\phi^{(\alpha)}]_{\alpha} = \left[\frac{\partial \phi^{(\alpha)}}{\partial Y_I^{(\alpha)}} \right]_{\alpha} \frac{dY_I^{(\alpha)}}{dt} + \left[\frac{\partial \phi^{(\alpha)}}{\partial t} \right]_{\alpha} \quad (3 \cdot 19)$$

ここに、 $\phi^{(\alpha)}$ は $Y_I^{(\alpha)}$ と t の任意関数、 $Y_I^{(\alpha)}(t)$ は $\Delta^{(\alpha)}$ 内の不連続面の基準配位での位置、 $[\phi^{(\alpha)}]_{\alpha}$ は α 相中の不連続面上における $\phi^{(\alpha)}$ の jump で次式で表わされる。

$$[\phi^{(\alpha)}]_{\alpha} = \phi_-^{(\alpha)} - \phi_+^{(\alpha)} \quad (3 \cdot 20)$$

ここに、 $\phi_+^{(\alpha)}$ は $\Delta^{(\alpha)}$ 内の不連続面前面での $\phi^{(\alpha)}$ の値、 $\phi_-^{(\alpha)}$ は $\Delta^{(\alpha)}$ 内の不連続面後面での値を表わす。

いま、 $\Delta^{(\alpha)}$ 内の不連続面の時刻 t における基準配位での方向余弦を $N_I^{(\alpha)}$ とし、この面の伝播速度を $U_{(\alpha)}$ とすれば次式をうる。

$$\frac{dY_I^{(\alpha)}(t)}{dt} = N_I^{(\alpha)} U_{(\alpha)} \quad (3 \cdot 21)$$

式 (3・21) を (3・19) に代入し次式をうる。

$$\frac{d}{dt} [\phi^{(\alpha)}]_{\alpha} = \left[\frac{\partial \phi^{(\alpha)}}{\partial Y_I^{(\alpha)}} \right]_{\alpha} N_I^{(\alpha)} U_{(\alpha)} + \left[\frac{\partial \phi^{(\alpha)}}{\partial t} \right]_{\alpha} \quad (3 \cdot 22)$$

一方、 $\Delta^{(\alpha)}$ 内の加速度波の伝播速度 $U_{(\alpha)}$ ならびにその振幅 $a_k^{(\alpha)}$ と各変量の jump の間には次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} [\ddot{x}_k^{(\alpha)}]_{X_I^{(\alpha)} \rightarrow Y_I^{(\alpha)}} &= U_{(\alpha)}^2 a_k^{(\alpha)} \\ [\dot{F}_{kL}^{(\alpha)}]_{X_I^{(\alpha)} \rightarrow Y_I^{(\alpha)}} &= -U_{(\alpha)} a_k^{(\alpha)} N_L^{(\alpha)} \\ [F_{kLJ}^{(\alpha)}]_{X_I^{(\alpha)} \rightarrow Y_I^{(\alpha)}} &= a_k^{(\alpha)} N_L^{(\alpha)} N_J^{(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 23)$$

以下では簡単のため $[\]$ につけた $X_I^{(\alpha)} \rightarrow Y_I^{(\alpha)}$ は省略することにする。式 $(3 \cdot 23)_1$ を式 $(3 \cdot 22)$ に代入し次式をうる。

$$2U_{(\alpha)} a_k^{(\alpha)} \frac{dU_{(\alpha)}}{dt} + U_{(\alpha)}^2 \frac{da_k^{(\alpha)}}{dt} = U_{(\alpha)} N_I^{(\alpha)} [\ddot{x}_{kI}^{(\alpha)}]_{\alpha} + [\ddot{x}_k^{(\alpha)}]_{\alpha} \quad (3 \cdot 24)$$

式 $(3 \cdot 23)_2$ に $N_L^{(\alpha)}$ を乗じ、それを式 $(3 \cdot 22)$ に代入し $N_L^{(\alpha)} (dN_L^{(\alpha)}/dt) = 0$ なることを考慮すると次式をうる。

$$-U_{(\alpha)} a_k^{(\alpha)} \frac{dU_{(\alpha)}}{dt} - U_{(\alpha)}^2 \frac{da_k^{(\alpha)}}{dt} = U_{(\alpha)}^2 N_I^{(\alpha)} N_L^{(\alpha)} [\dot{F}_{kL,I}^{(\alpha)}]_{\alpha} + U_{(\alpha)} N_L^{(\alpha)} [\ddot{F}_{kL}^{(\alpha)}]_{\alpha} \quad (3 \cdot 25)$$

式 $(3 \cdot 24)$, $(3 \cdot 25)$ より次式をうる。

$$2U_{(\alpha)}^2 \frac{da_k^{(\alpha)}}{dt} + 3U_{(\alpha)} \frac{dU_{(\alpha)}}{dt} a_k^{(\alpha)} = [\ddot{x}_k^{(\alpha)}]_{\alpha} - U_{(\alpha)}^2 N_I^{(\alpha)} N_L^{(\alpha)} [\dot{F}_{kL,I}^{(\alpha)}]_{\alpha} \quad (3 \cdot 26)$$

3・4 2相混合体中を伝わる加速度波の速度

3・4・1 構成関係に速度こう配が入る物体中の加速度波の存否

以下の解析では、 $\Delta^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) の質量の変化はないと仮定する。したがって次式をうる。

$$m_{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (3 \cdot 27)$$

式 $(3 \cdot 13)$ より、混合体としての運動量の釣合式の積分形を求めると次のようになる。

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{D^{(\alpha)}}{Dt} \int_V \rho^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} dV = \int_V \sum_{\alpha=1}^2 \rho^{(\alpha)} G_i^{(\alpha)} dV + \int_S \sum_{\alpha=1}^2 \sigma_{ki}^{(\alpha)} \nu_k dS \quad (3 \cdot 28)$$

ここに、 ν_k は時刻 t において体積 V を占める混合体の表面 S の方向余弦である。式 (3・28) を基準配位での釣合式に書きなおすと次式となる。

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{D^{(\alpha)}}{Dt} \int_{V_0^{(\alpha)}} \rho_0^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} dV = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{V_0^{(\alpha)}} \rho_0^{(\alpha)} G_i^{(\alpha)} dV + \sum_{\alpha=1}^2 \int_{S_0^{(\alpha)}} P_{ji}^{(\alpha)} \tilde{N}_j^{(\alpha)} dS \quad (3 \cdot 29)$$

ここに、 $V_0^{(\alpha)}$ は時刻 t で V なる体積をもつ $\Delta^{(\alpha)}$ の基準配位での体積、 $S_0^{(\alpha)}$ は時刻 t で S なる表面積 (V の表面積) をもつ $\Delta^{(\alpha)}$ の基準配位での表面積 ($V_0^{(\alpha)}$ の表面積)、 $\tilde{N}_j^{(\alpha)}$ は $S_0^{(\alpha)}$ の方向余弦である。

いま、 $\Delta^{(\beta)}$ 内を伝わる加速度波を考え、図 3・2 のような積分領域を考える。 $\varphi_{(\beta)}$ は不連続面の位置を、 $R_{(\beta)}^+$ 、 $R_{(\beta)}^-$ は不連続面のまわりの体積領域を、 $\varphi_{(\beta)}^+$ 、 $\varphi_{(\beta)}^-$ はその表面を、 $\tilde{N}_j^{(\beta)}$ はこの表面の方向余弦を表わし、 $R_0^{(\beta)} = R_{(\beta)}^+ + R_{(\beta)}^-$ とする。この場合、以下式 (3・30) ~ (3・33) で表わされる積分演算が求められる。

$$\begin{aligned} & \frac{D^{(\alpha)}}{Dt} \int_{R_0^{(\beta)}} \rho_0^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} dV \\ &= \frac{D^{(\alpha)}}{Dt} \int_{R_{(\beta)}^+} \rho_0^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} dV \\ &+ \frac{D^{(\alpha)}}{Dt} \int_{R_{(\beta)}^-} \rho_0^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} dV \quad (3 \cdot 30) \end{aligned}$$

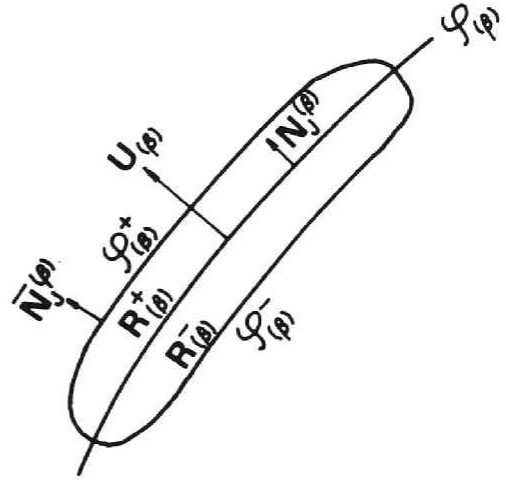


図 3.2 不連続面のまわりの積分領域

式 (3・30) の右辺の各項は次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{D^{(\alpha)}}{Dt} \int_{R_{(\beta)}^+} \rho_0^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} dV &= \int_{R_{(\beta)}^+} \rho_0^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)} dV - \int_{\varphi_{(\beta)}} I_{\alpha\beta}^+ dS \\ \frac{D^{(\alpha)}}{Dt} \int_{R_{(\beta)}^-} \rho_0^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} dV &= \int_{R_{(\beta)}^-} \rho_0^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)} dV + \int_{\varphi_{(\beta)}} I_{\alpha\beta}^- dS \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 31)$$

ただし、

$$I_{\alpha\beta}^+ = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ (\rho_0^{(\beta)} v_i^{(\beta)})^+ U_{(\beta)} & (\alpha = \beta) \end{cases}, \quad I_{\alpha\beta}^- = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ (\rho_0^{(\beta)} v_i^{(\beta)})^- U_{(\beta)} & (\alpha = \beta) \end{cases} \quad (3 \cdot 32)$$

ここに、 $()^+$, $()^-$ はそれぞれ $()$ の不連続面前後面での値を表わしている。式(3・31), (3・32)を式(3・30)に代入し次式をうる。

$$\frac{D^{(\alpha)}}{Dt} \int_{R_{(\beta)}} \rho_0^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} dV = \int_{R_{(\beta)}} \rho_0^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)} dV + \int_{\varphi_{(\beta)}} [\rho_0^{(\beta)} v_i^{(\beta)}]_{\beta} U_{(\beta)} dS \quad (3 \cdot 33)$$

ここで $V_0^{(\alpha)}$ を $R_0^{(\beta)}$ におきかえ $S_0^{(\alpha)} = \varphi_{(\beta)}^+ + \varphi_{(\beta)}^-$ とすれば、式(3・29)は次式のように書きなおせる。

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{R_0^{(\beta)}} \rho_0^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)} dV &= \sum_{\alpha=1}^2 \int_{R_0^{(\beta)}} \rho_0^{(\alpha)} G_i^{(\alpha)} dV - \int_{\varphi_{(\beta)}} [\rho_0^{(\beta)} v_i^{(\beta)}]_{\beta} U_{(\beta)} dS \\ &+ \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\varphi_{(\beta)}^+ + \varphi_{(\beta)}^-} P_{Ji}^{(\alpha)} \bar{N}_J^{(\beta)} dS \end{aligned} \quad (3 \cdot 34)$$

式(3・34)で $\varphi_{(\beta)}^+$, $\varphi_{(\beta)}^-$ を $\varphi_{(\beta)}$ に近づけると体積積分の項は0になり、 $\varphi_{(\beta)}^+$ 上の $\bar{N}_J^{(\beta)}$ は不連続面の方向余弦 $N_J^{(\beta)}$ に、 $\varphi_{(\beta)}^-$ 上の $\bar{N}_J^{(\beta)}$ は $-N_J^{(\beta)}$ に等しくなるから、式(3・34)は次式のようになる。

$$\int_{\varphi_{(\beta)}} \{ [\rho_0^{(\beta)} v_i^{(\beta)}]_{\beta} U_{(\beta)} + [\sum_{\alpha=1}^2 P_{Ji}^{(\alpha)}]_{\beta} N_J^{(\beta)} \} dS = 0 \quad (3 \cdot 35)$$

一方、加速度波を考えているから

$$[\rho_0^{(\beta)} v_i^{(\beta)}]_{\beta} = 0 \quad (3 \cdot 36)$$

したがって、式(3・35)より次式をうる。

$$[\sum_{\alpha=1}^2 P_{Ji}^{(\alpha)}]_{\beta} N_J^{(\beta)} = 0 \quad (3 \cdot 37)$$

これは、1相系のKotchineの定理¹⁾を2相系に拡張したものであり、2相系の弱不連続面に対するPoisson形式に相当するものになる。

いま $P_{Ji}^{(\alpha)}$ が $\dot{F}_{LM}^{(\alpha)} = 0$ のまわりでテーラー展開可能であるとすれば、次式のような構成関係をうる。

$$\begin{aligned} P_{Ji}^{(\alpha)} &= A_{Ji}^{(\alpha)} + B_{JiLM}^{(\alpha)} \dot{F}_{LM}^{(1)} + C_{JiLM}^{(\alpha)} \dot{F}_{LM}^{(2)} + B_{JiLMpQ}^{(\alpha)} \dot{F}_{LM}^{(1)} \dot{F}_{pQ}^{(1)} \\ &+ D_{JiLMpQ}^{(\alpha)} \dot{F}_{LM}^{(1)} \dot{F}_{pQ}^{(2)} + C_{JiLMpQ}^{(\alpha)} \dot{F}_{LM}^{(2)} \dot{F}_{pQ}^{(2)} + B_{JiLMpQrS}^{(\alpha)} \dot{F}_{LM}^{(1)} \dot{F}_{pQ}^{(1)} \dot{F}_{rS}^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D_{JiLMpQ\tau S}^{(\alpha)} \dot{F}_{iM}^{(1)} \dot{F}_{pQ}^{(1)} \dot{F}_{\tau S}^{(2)} + E_{JiLMpQ\tau S}^{(\alpha)} \dot{F}_{iM}^{(1)} \dot{F}_{pQ}^{(2)} \dot{F}_{\tau S}^{(2)} + C_{JiLMpQ\tau S}^{(\alpha)} \dot{F}_{iM}^{(2)} \dot{F}_{pQ}^{(2)} \dot{F}_{\tau S}^{(2)} \\
& + \dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{3.38}$$

ここに、 $A_{Ji}^{(\alpha)}$, $B_{JiLM}^{(\alpha)}$, $C_{JiLM}^{(\alpha)}$, $\dots\dots$ は T , $F_{iJ}^{(\alpha)}$, v_i の連続関数である。また、これら係数に付いている添字の組合せ、 iM , pQ , τS の順が入れ変ってもその値に変化はないものとする。たとえば次式で示したような関係式が成立している。

$$\left. \begin{aligned}
B_{JiLMpQ}^{(\alpha)} &= B_{JipQLM}^{(\alpha)}, \dots\dots\dots \\
B_{JiLMpQ\tau S}^{(\alpha)} &= B_{JipQLM\tau S}^{(\alpha)} = B_{JipQ\tau SLM}^{(\alpha)} = B_{JiLM\tau SpQ}^{(\alpha)} \\
&= B_{Ji\tau SLMpQ}^{(\alpha)} = B_{Ji\tau SpQLM}^{(\alpha)}, \dots\dots\dots
\end{aligned} \right\} \tag{3.39}$$

式(3.38)を式(3.37)に代入し、式(3.23)₂の関係を考慮すれば、 $\Delta^{(1)}$ ならびに $\Delta^{(2)}$ 内の加速度波面において次式が求まる。

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^2 \{ B_{JiLM}^{(\alpha)} N_J^{(1)} N_M^{(1)} + B_{JiLMpQ}^{(\alpha)} N_J^{(1)} N_M^{(1)} ([\dot{F}_{pQ}^{(1)}]_1 + 2\dot{F}_{pQ}^{(1)+}) + D_{JiLMpQ}^{(\alpha)} N_J^{(1)} N_M^{(1)} \dot{F}_{pQ}^{(2)} \\
& + B_{JiLMpQ\tau S}^{(\alpha)} N_J^{(1)} N_M^{(1)} ([\dot{F}_{pQ}^{(1)}]_1 [\dot{F}_{\tau S}^{(1)}]_1 + 3\dot{F}_{pQ}^{(1)+} [\dot{F}_{\tau S}^{(1)}]_1 + 3\dot{F}_{pQ}^{(1)+} \dot{F}_{\tau S}^{(1)+}) \\
& + D_{JiLMpQ\tau S}^{(\alpha)} N_J^{(1)} N_M^{(1)} \dot{F}_{\tau S}^{(2)} ([\dot{F}_{pQ}^{(1)}]_1 + 2\dot{F}_{pQ}^{(1)+}) + E_{JiLMpQ\tau S}^{(\alpha)} N_J^{(1)} N_M^{(1)} \dot{F}_{pQ}^{(2)} \dot{F}_{\tau S}^{(2)} \\
& + \dots\dots\dots \} U_{(1)} a_i^{(1)} = 0 \tag{3.40}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^2 \{ C_{JiLM}^{(\alpha)} N_J^{(2)} N_M^{(2)} + C_{JiLMpQ}^{(\alpha)} N_J^{(2)} N_M^{(2)} ([\dot{F}_{pQ}^{(2)}]_2 + 2\dot{F}_{pQ}^{(2)+}) + D_{JiLMpQ}^{(\alpha)} N_J^{(2)} N_M^{(2)} \dot{F}_{pQ}^{(1)} \\
& + C_{JiLMpQ\tau S}^{(\alpha)} N_J^{(2)} N_M^{(2)} ([\dot{F}_{pQ}^{(2)}]_2 [\dot{F}_{\tau S}^{(2)}]_2 + 3\dot{F}_{pQ}^{(2)+} [\dot{F}_{\tau S}^{(2)}]_2 + 3\dot{F}_{pQ}^{(2)+} \dot{F}_{\tau S}^{(2)+}) \\
& + D_{JiLMpQ\tau S}^{(\alpha)} N_J^{(2)} N_M^{(2)} \dot{F}_{iM}^{(1)} \dot{F}_{pQ}^{(1)} + E_{JiLMpQ\tau S}^{(\alpha)} N_J^{(2)} N_M^{(2)} \dot{F}_{\tau S}^{(1)} ([\dot{F}_{pQ}^{(2)}]_2 + 2\dot{F}_{pQ}^{(2)+}) \\
& + \dots\dots\dots \} U_{(2)} a_i^{(2)} = 0 \tag{3.40}_2
\end{aligned}$$

ただし、上式の関係を得るために次式のような関係式を用いている。

$$\begin{aligned}
[\dot{F}_{iM}^{(\alpha)} \dot{F}_{pQ}^{(\alpha)}]_{\alpha} &= [\dot{F}_{iM}^{(\alpha)}]_{\alpha} [\dot{F}_{pQ}^{(\alpha)}]_{\alpha} + \dot{F}_{iM}^{(\alpha)+} [\dot{F}_{pQ}^{(\alpha)}]_{\alpha} + \dot{F}_{pQ}^{(\alpha)+} [\dot{F}_{iM}^{(\alpha)}]_{\alpha} \tag{3.41}_1 \\
[\dot{F}_{iM}^{(\alpha)} \dot{F}_{pQ}^{(\alpha)} \dot{F}_{\tau S}^{(\alpha)}]_{\alpha} &= [\dot{F}_{iM}^{(\alpha)}]_{\alpha} [\dot{F}_{pQ}^{(\alpha)}]_{\alpha} [\dot{F}_{\tau S}^{(\alpha)}]_{\alpha} + \dot{F}_{iM}^{(\alpha)+} [\dot{F}_{pQ}^{(\alpha)}]_{\alpha} [\dot{F}_{\tau S}^{(\alpha)}]_{\alpha} \\
& + \dot{F}_{pQ}^{(\alpha)+} [\dot{F}_{iM}^{(\alpha)}]_{\alpha} [\dot{F}_{\tau S}^{(\alpha)}]_{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{F}_{pQ}^{(\alpha)+} [\dot{F}_{lM}^{(\alpha)}]_{\alpha} [\dot{F}_{rS}^{(\alpha)}]_{\alpha} + \dot{F}_{rS}^{(\alpha)+} [\dot{F}_{lM}^{(\alpha)}]_{\alpha} [\dot{F}_{pQ}^{(\alpha)}]_{\alpha} \\
& + \dot{F}_{lM}^{(\alpha)+} \dot{F}_{pQ}^{(\alpha)+} [\dot{F}_{rS}^{(\alpha)}]_{\alpha} + \dot{F}_{pQ}^{(\alpha)+} \dot{F}_{rS}^{(\alpha)+} [\dot{F}_{lM}^{(\alpha)}]_{\alpha} + \dot{F}_{rS}^{(\alpha)+} \dot{F}_{lM}^{(\alpha)+} [\dot{F}_{pQ}^{(\alpha)}]_{\alpha} \quad (3.41)
\end{aligned}$$

式(3.40)の両式はつぎの2つの場合に成立することになる。

$$(I) : a_l^{(\alpha)} = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (3.42)$$

(II) :

(II-1) $\omega^{(1)}$ 内の加速度波に対し

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^2 \{ B_{Ji l M}^{(\alpha)} N_J^{(1)} N_M^{(1)} + B_{Ji l M p Q}^{(\alpha)} N_J^{(1)} N_M^{(1)} ([\dot{F}_{pQ}^{(1)}]_1 + 2\dot{F}_{pQ}^{(1)+}) + D_{Ji l M p Q}^{(\alpha)} N_J^{(1)} N_M^{(1)} \dot{F}_{pQ}^{(2)} \\
& + B_{Ji l M p Q r S}^{(\alpha)} N_J^{(1)} N_M^{(1)} ([\dot{F}_{pQ}^{(1)}]_1 [\dot{F}_{rS}^{(1)}]_1 + 3\dot{F}_{pQ}^{(1)+} [\dot{F}_{rS}^{(1)}]_1 + 3\dot{F}_{pQ}^{(1)+} \dot{F}_{rS}^{(1)+}) \\
& + D_{Ji l M p Q r S}^{(\alpha)} N_J^{(1)} N_M^{(1)} \dot{F}_{rS}^{(2)} ([\dot{F}_{pQ}^{(1)}]_1 + 2\dot{F}_{pQ}^{(1)+}) + E_{Ji l M p Q r S}^{(\alpha)} N_J^{(1)} N_M^{(1)} \dot{F}_{pQ}^{(2)} \dot{F}_{rS}^{(2)} \\
& + \dots \} = 0 \quad (3.43)_1
\end{aligned}$$

(II-2) $\omega^{(2)}$ 内の加速度波に対し

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^2 \{ C_{Ji l M}^{(\alpha)} N_J^{(2)} N_M^{(2)} + C_{Ji l M p Q}^{(\alpha)} N_J^{(2)} N_M^{(2)} ([\dot{F}_{pQ}^{(2)}]_2 + 2\dot{F}_{pQ}^{(2)+}) + D_{Ji l M p Q r S}^{(\alpha)} N_J^{(2)} N_M^{(2)} \dot{F}_{pQ}^{(1)} \\
& + C_{Ji l M p Q r S}^{(\alpha)} N_J^{(2)} N_M^{(2)} ([\dot{F}_{pQ}^{(2)}]_2 [\dot{F}_{rS}^{(2)}]_2 + 3\dot{F}_{pQ}^{(2)+} [\dot{F}_{rS}^{(2)}]_2 + 3\dot{F}_{pQ}^{(2)+} \dot{F}_{rS}^{(2)+}) \\
& + D_{Ji l M p Q r S}^{(\alpha)} N_J^{(2)} N_M^{(2)} \dot{F}_{lM}^{(1)} \dot{F}_{pQ}^{(1)} + E_{Ji l M p Q r S}^{(\alpha)} N_J^{(2)} N_M^{(2)} \dot{F}_{rS}^{(2)} ([\dot{F}_{pQ}^{(2)}]_2 + 2\dot{F}_{pQ}^{(2)+}) \\
& + \dots \} = 0 \quad (3.43)_2
\end{aligned}$$

式(3.40)で(I)すなわち、式(3.42)が成立する場合、混合体中の加速度波の振幅は恒等的に0となり、波動が伝わらない事になる。一方、(II)すなわち式(3.43)が成立する場合には、 $a_l^{(\alpha)} \neq 0$ ($\alpha = 1, 2$)なる解を式(3.40)がもつことになり、構成関係に速度こう配が入る物体中でも加速度波が存在できることになる。この結果はNavier-Stokes流体中では加速度波が存在できないという結果³⁵⁾と比較することができる。Navier-Stokes流体ではエントロピー不等式より求まる構成関係の制限条件が式(3.43)を満たさないため、式(3.42)のみが成立し加速度波が存在できなくなる。しかし、一般の粘弾性体ではエントロピー不等式から、このような条件は求まらないため、式(3.43)の条件を満たすような加速度波が存在することになるが、この場合は初期条件が特殊な条件を満たす場合のみで、波動の伝播速度も振幅の大小も波前面

の状態によって一義的に決まり、振幅は時間 t を陽に含まないことになる。³⁶⁾ すなわち、波前面の状態が一定であれば振幅は時間的に変動しない一定値を取る。これらのことから、式(3・43)の条件を満たすような加速度波はかなり特殊な初期条件のときのみ可能と考えられ、普通の初期条件のもとでは式(3・42)が成立する場合が多いと考えられる。したがって以下の解析では構成関係に速度こう配が入らない物体を考えることにする。また Bowen と Wiese³⁷⁾によれば、2相系の構成関係には $F_{ij,k}^{(\alpha)}$ が入ることになるが、この場合にも特殊な初期条件のもとでのみ加速度波が伝播できるという結論を得ることができる。³²⁾

3・4・2 加速度波の伝播速度

以上の考察を基にして、式(3・17)で与えられる構成関係を次式のようなものに置き変える。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon(T, F_{ij}^{(\alpha)}) \\ P_{Lk}^{(\alpha)} &= P_{Lk}^{(\alpha)}(T, F_{ij}^{(\alpha)}, v_i) \\ \pi_k &= \pi_k(T, F_{ij}^{(\alpha)}, v_i) \\ q_k &= q_k(T, F_{ij}^{(\alpha)}, v_i, g_i) \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 44)$$

式(3・18)、(3・27)を考慮し、式(3・44)₂を式(3・13)に代入し両辺の jump を取れば次式をうる。

$$\rho_0^{(\alpha)} [f_i^{(\alpha)} - G_i^{(\alpha)}]_{\alpha} - [P_{ji,j}^{(\alpha)}]_{\alpha} = \mp [J^{(\alpha)} \pi_i]_{\alpha} \quad (3 \cdot 45)$$

ここに、 $J^{(\alpha)} = \rho_0^{(\alpha)} / \rho^{(\alpha)}$ であり、 \mp 符号は $\alpha = 1$ の時上側を $\alpha = 2$ の時下側を取るものとする。この規約はこれ以後も同様に成立するものとする。

いま、物体力 $\rho_0^{(\alpha)} G_i^{(\alpha)}$ は連続であると仮定すれば次式をうる。

$$[G_i^{(\alpha)}]_{\alpha} = 0 \quad (3 \cdot 46)$$

一方、式(3・44)_{2,3}より次式の関係をうる。

$$\left. \begin{aligned} [P_{ji,j}^{(\alpha)}]_{\alpha} &= (\partial P_{ji}^{(\alpha)} / \partial F_{lm}^{(\alpha)}) [F_{lm,j}^{(\alpha)}]_{\alpha} \\ &\quad \pm (\partial P_{ji}^{(\alpha)} / \partial v_l) [v_{l,j}]_{\alpha} + (\partial P_{ji}^{(\alpha)} / \partial T) [T, j]_{\alpha} \\ [J^{(\alpha)} \pi_i]_{\alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 47)$$

式(3・46), (3・47)を(3・45)に代入し, (3・23)_{2,3}の関係を用いれば次式をうる。

$$\{U_{(\alpha)}^2 \delta_{il} \pm C_{il}^{(\alpha)} U_{(\alpha)} - Q_{il}^{(\alpha)}\} a_l^{(\alpha)} + (\partial P_{ji}^{(\alpha)} / \partial T) [T, j]_a = 0 \quad (3 \cdot 48)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} C_{il}^{(\alpha)} &= \frac{1}{\rho_0^{(\alpha)}} \left(\frac{\partial P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial v_l} \right) N_K^{(\alpha)} \\ Q_{il}^{(\alpha)} &= \frac{1}{\rho_0^{(\alpha)}} \left(\frac{\partial P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{lM}^{(\alpha)}} \right) N_K^{(\alpha)} N_M^{(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 49)$$

である。いま, 物体が同温的な状態にあると仮定すれば次式が成立する。

$$\left[\frac{\partial T}{\partial X_j^{(\alpha)}} \right]_a = [\dot{T}]_a = 0 \quad (3 \cdot 50)$$

式(3・50)を式(3・48)に代入すれば, 式(3・44)で表わされるような構成関係をもつ物体中を伝播する加速度波の伝播速度を決定する特性方程式として次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \det | U_{(1)}^2 \delta_{il} + C_{il}^{(1)} U_{(1)} - Q_{il}^{(1)} | &= 0 \\ \det | U_{(2)}^2 \delta_{il} - C_{il}^{(2)} U_{(2)} - Q_{il}^{(2)} | &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 51)$$

式(3・51)の2式は独立に成立し, かつ $U_{(\alpha)}$ に関して6次の方程式になる。このことから, 加速度波は各相を独立に伝播でき, 各相に6個, 合計12個の相異なる波動の存在できる可能性のあることがわかる。なお, 式(3・51)の形より拡散力(diffusive force) π_i は加速度波の伝播速度に影響を与えないことも明らかになる。

一相系の物体の場合には式(3・51)の形は

$$\det | U^2 \delta_{il} - Q_{il} | = 0$$

となり, 正の方向と負の方向に伝播する波動の伝播速度は一致し, これを一組の波動と考えれば独立な波動は3個となり, 上で述べた2相系の波動とはかなり異なったものとなる。これは2相系の構成関係に相対速度が入るため特性方程式の中に $C_{il}^{(\alpha)} U_{(\alpha)}$ なる項があるからである。すなわち, 2相系を伝播する加速度波の伝播速度は, 各相の相対速度の影響を受け, 正の方向と負の方向で異なることを意味している。

以上のことは, 各相が互に相対運動を行なっている領域へ加速度波が進入する場合に発生す

る現象であるが、静止した領域へ加速度波が進入する場合を考えると、波面では相対速度が0になっているから、正の方向ならびに負の方向に伝わる波動の速度は一致しなければならない。これから応力の構成関係に対する制限条件が以下のように誘導できる。いま $P_{ji}^{(\alpha)}$ が $v_l = 0$ のまわりでテーラー展開可能であるとすれば、次式をうる。

$$P_{ji}^{(\alpha)} = H_{ji}^{1(\alpha)} + H_{jil}^{2(\alpha)} v_l + H_{jilm}^{3(\alpha)} v_l v_m + H_{jilmn}^{4(\alpha)} v_l v_m v_n + \dots \quad (3.52)$$

ここに、 $H_{ji}^{1(\alpha)}$, $H_{jil}^{2(\alpha)}$, \dots は T ならびに $F_{kl}^{(\alpha)}$ の連続関数である。式(3.52)を式(3.49)₁に代入し次式をうる。

$$C_{il}^{(\alpha)} = H_{jil}^{2(\alpha)} N_j^{(\alpha)} + H_{jilm}^{3(\alpha)} v_m N_j^{(\alpha)} + H_{jilmn}^{4(\alpha)} v_m v_n N_j^{(\alpha)} + \dots \quad (3.53)$$

ここで、 $v_m = 0$ とすれば

$$C_{il}^{(\alpha)} = H_{jil}^{2(\alpha)} N_j^{(\alpha)}$$

となり、 $v_m = 0$ の時正の方向と負の方向への伝播速度が一致するためには、次式が成立しなければならない。

$$H_{jil}^{2(\alpha)} \equiv 0 \quad (3.54)$$

すなわち、応力の構成関係には相対速度の1次項が含まれないという結果をうる。

3・5 2相混合体中を伝わる加速度波の振幅の消長

3・5・1 加速度波の振幅の消長を支配する一般的な方程式

式(3.13)の両辺の物質微分($D^{(\alpha)}/Dt$)を取り、式(3.18)の関係を考慮して、両辺のjumpを取ると次式をうる。

$$\begin{aligned} & [\dot{J}^{(2)}]_2 \pi_i + J^{(2)} [\dot{\pi}_i]_2 = \rho_0^{(2)} [\ddot{x}_i^{(2)}]_2 - [\dot{P}_{Ki,K}^{(2)}]_2 \\ & - [\dot{J}^{(1)}]_1 \pi_i - J^{(1)} [\dot{\pi}_i]_1 = \rho_0^{(1)} [\ddot{x}_i^{(1)}]_1 - [\dot{P}_{Ki,K}^{(1)}]_1 \end{aligned} \quad (3.55)$$

ここに、 $()$ は $\partial()/\partial t$ を表わす。式(3.55)の両辺に現われる jump を式(3.23), (3.44)の関係を用いて計算し、式(3.55)より $[\ddot{x}_i^{(\alpha)}]_\alpha$ を求めると次式のようなになる。

$$[\ddot{x}_i^{(\alpha)}]_\alpha = M_{il}^{(\alpha)} a_l^{(\alpha)} + \lambda_{ilm} a_l^{(\alpha)} a_m^{(\alpha)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\rho_0^{(\alpha)}} (\partial P_{Ki}^{(\alpha)} / \partial F_{lM}^{(\alpha)}) [\dot{F}_{lM,K}^{(\alpha)}]_\alpha \pm \frac{1}{\rho_0^{(\alpha)}} (\partial P_{Ki}^{(\alpha)} / \partial v_l) [\ddot{F}_{lK}^{(\alpha)}]_\alpha \\
& + \frac{1}{\rho_0^{(\alpha)}} (\partial P_{Ki}^{(\alpha)} / \partial T) [\partial T / \partial t \partial X_K^{(\alpha)}]_\alpha
\end{aligned} \tag{3.56}$$

ここに

$$\begin{aligned}
\rho_0^{(\alpha)} \lambda_{ilm}^{(\alpha)} = & - \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{mJ}^{(\alpha)} \partial F_{lM}^{(\alpha)}} U_{(\alpha)} N_M^{(\alpha)} N_K^{(\alpha)} N_J^{(\alpha)} \\
& \pm 2 \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial v_l \partial F_{mM}^{(\alpha)}} U_{(\alpha)}^2 N_K^{(\alpha)} N_M^{(\alpha)} - \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial v_l \partial v_m} U_{(\alpha)}^3 N_K^{(\alpha)}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\rho_0^{(\alpha)} M_{il}^{(\alpha)} = & - \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{lM}^{(\alpha)} \partial T} \frac{\partial T}{\partial X_K^{(\alpha)}} U_{(\alpha)} N_M^{(\alpha)} \pm \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial v_l \partial T} \frac{\partial T}{\partial X_K^{(\alpha)}} U_{(\alpha)}^2 \\
& + \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial T \partial F_{lM}^{(\alpha)}} \frac{\partial T}{\partial t} N_M^{(\alpha)} N_K^{(\alpha)} + \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{mJ}^{(\beta)} \partial F_{lM}^{(\alpha)}} \dot{F}_{mJ}^{(\beta)} N_M^{(\alpha)} N_K^{(\alpha)} \\
& \mp \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial T \partial v_l} \frac{\partial T}{\partial t} U_{(\alpha)} N_K^{(\alpha)} \mp \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{mM}^{(\beta)} \partial v_l} \dot{F}_{mM}^{(\beta)} U_{(\alpha)} N_K^{(\alpha)} \\
& - \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{lM}^{(\alpha)} \partial F_{mJ}^{(\alpha)}} F_{mJ,K}^{(\alpha)+} U_{(\alpha)} N_M^{(\alpha)} + \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{mJ}^{(\alpha)} \partial F_{lM}^{(\alpha)}} \dot{F}_{mJ}^{(\alpha)+} N_M^{(\alpha)} N_K^{(\alpha)} \\
& \pm \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial v_l \partial F_{mM}^{(\alpha)}} F_{mM,K}^{(\alpha)+} U_{(\alpha)}^2 \pm \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial v_m \partial F_{lM}^{(\alpha)}} \ddot{x}_m^{(\alpha)+} N_M^{(\alpha)} N_K^{(\alpha)} \\
& \mp \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{lM}^{(\alpha)} \partial v_m} \dot{F}_{mK}^{(\alpha)+} U_{(\alpha)} N_M^{(\alpha)} \mp \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial F_{mM}^{(\alpha)} \partial v_l} \dot{F}_{mM}^{(\alpha)+} U_{(\alpha)} N_K^{(\alpha)} \\
& + \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial v_l \partial v_m} \dot{F}_{mK}^{(\alpha)+} U_{(\alpha)}^2 - \frac{\partial^2 P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial v_l \partial v_m} \ddot{x}_m^{(\alpha)+} U_{(\alpha)} N_K^{(\alpha)} \\
& \mp \pi_i \frac{\partial J^{(\alpha)}}{\partial F_{lM}^{(\alpha)}} U_{(\alpha)} N_M^{(\alpha)} \mp J^{(\alpha)} \frac{\partial \pi_i}{\partial F_{lM}^{(\alpha)}} U_{(\alpha)} N_M^{(\alpha)} \pm J^{(\alpha)} \frac{\partial \pi_i}{\partial v_l} U_{(\alpha)}^2
\end{aligned} \tag{3.58}$$

式(3.58)に現われる β は $\alpha=1$ の時2, $\alpha=2$ の時1の値を取るものとする。

一方, 式(3.23)₂を式(3.22)に代入し整理すると次式をうる。

$$[\ddot{F}_{lK}^{(\alpha)}]_\alpha = -U_{(\alpha)} N_I^{(\alpha)} [\dot{F}_{lK,I}^{(\alpha)}]_\alpha - \frac{dU_{(\alpha)}}{dt} U_K^{(\alpha)} a_l^{(\alpha)}$$

$$-U_{(\alpha)} N_K^{(\alpha)} \frac{d a_l^{(\alpha)}}{d t} - U_{(\alpha)} a_l^{(\alpha)} \frac{d N_K^{(\alpha)}}{d t} \quad (3 \cdot 59)$$

式(3・59)を式(3・56)の右辺第4項に代入し、それを式(3・26)に代入し整理すると加速度波の振幅を支配する方程式としてつぎの2式をうる。

$$\begin{aligned} (C_{il}^{(1)} U_{(1)} + 2U_{(1)}^2 \delta_{il}) \frac{d a_l^{(1)}}{d t} &= \mu_{il}^{(1)} a_l^{(1)} + \lambda_{ilm}^{(1)} a_l^{(1)} a_m^{(1)} \\ &+ \left(\frac{1}{\rho_0^{(1)}} \frac{\partial P_{Ki}^{(1)}}{\partial F_{lM}^{(1)}} - \frac{1}{\rho_0^{(1)}} \frac{\partial P_{Mi}^{(1)}}{\partial v_l} U_{(1)} N_K^{(1)} - U_{(1)}^2 N_M^{(1)} N_K^{(1)} \delta_{il} \right) [\dot{F}_{lM,K}^{(1)}]_1 \\ &+ \frac{1}{\rho_0^{(1)}} \left(\frac{\partial P_{Ki}^{(1)}}{\partial T} \right) \left[\frac{\partial^2 T}{\partial X_K^{(\alpha)} \partial t} \right]_1 \end{aligned} \quad (3 \cdot 60)_1$$

$$\begin{aligned} (-C_{il}^{(2)} U_{(2)} + 2U_{(2)}^2 \delta_{il}) \frac{d a_l^{(2)}}{d t} &= \mu_{il}^{(2)} a_l^{(2)} + \lambda_{ilm}^{(2)} a_l^{(2)} a_m^{(2)} \\ &+ \left(\frac{1}{\rho_0^{(2)}} \frac{\partial P_{Ki}^{(2)}}{\partial F_{lM}^{(2)}} + \frac{1}{\rho_0^{(2)}} \frac{\partial P_{Mi}^{(2)}}{\partial v_l} U_{(2)} N_K^{(2)} - U_{(2)}^2 N_M^{(2)} N_K^{(2)} \delta_{il} \right) [\dot{F}_{lM,K}^{(2)}]_2 \\ &+ \frac{1}{\rho_0^{(2)}} \left(\frac{\partial P_{Ki}^{(2)}}{\partial T} \right) \left[\frac{\partial^2 T}{\partial X_K^{(\alpha)} \partial t} \right]_2 \end{aligned} \quad (3 \cdot 60)_2$$

ここに、

$$\rho_0^{(\alpha)} \mu_{il}^{(\alpha)} = \rho_0^{(\alpha)} M_{il}^{(\alpha)} - 3U_{(\alpha)} \frac{d U_{(\alpha)}}{d t} \delta_{il} \mp \frac{\partial P_{Ki}^{(\alpha)}}{\partial v_l} \left(\frac{\partial U_{(\alpha)}}{d t} N_K^{(\alpha)} + U_{(\alpha)} \frac{d N_K^{(\alpha)}}{d t} \right) \quad (3 \cdot 61)$$

式(3・60)₁は $\delta^{(1)}$ 相を、(3・60)₂は $\delta^{(2)}$ 相を伝わる加速度波の振幅を支配する一般的な方程式である。しかしこの方程式は右辺第3項に $[\dot{F}_{lM,K}^{(\alpha)}]_a$ 、第4項に $[\partial^2 T / \partial X_K^{(\alpha)} \partial t]_a$ なる項があり、加速度波の振幅のみからなる常微分方程式に変換することができないため、これ以上一般的な考察は行なえない。以下波動の伝播形態に制限を加えることによって、この困難さを取り除き、加速度波の振幅の消長について調べることにする。

3・5・2 一定方向に伝播する平面的な加速度波の消長

以下この節では、式(3・60)に対しつぎのような仮定を設ける。

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial X_K^{(\alpha)} \partial t} \right]_\alpha = 0 \quad (3 \cdot 62)$$

式 (3・62) が成立すれば、式 (3・60) の右辺第 4 項は 0 となる。第 3 項を除くために一定方向に伝播する平面的な加速度波を考えることにする。

いま、波動の伝播する方向を $X_1^{(\alpha)}$ 方向に固定すれば次式をうる。

$$N_1^{(\alpha)} = 1, \quad N_2^{(\alpha)} = N_3^{(\alpha)} = 0 \quad (3 \cdot 63)$$

平面的な加速度波を考えるから、変形は次式で表わされるようなものとなる。

$$x_i^{(\alpha)} = X_I^{(\alpha)} + u_I^{(\alpha)}(X_1, t)$$

この場合、 $F_{ij}^{(\alpha)}$ は次式のようにになる。

$$F_{ij}^{(\alpha)} = \delta_{IJ} + u_{I,J}^{(\alpha)} \delta_{J1} = \begin{pmatrix} 1 + u_{1,1} & 0 & 0 \\ u_{2,1} & 1 & 0 \\ u_{3,1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3 \cdot 64)$$

いま、次式で $A_{il}^{(\alpha)}$, $B_{il}^{(\alpha)}$ なるテンソルを定義する。

$$\rho_0^{(\alpha)} A_{il}^{(\alpha)} = \frac{\partial P_{1i}^{(\alpha)}}{\partial F_{l1}^{(\alpha)}}, \quad \rho_0^{(\alpha)} B_{il}^{(\alpha)} = \frac{\partial P_{1i}^{(\alpha)}}{\partial v_l^{(\alpha)}} \quad (3 \cdot 65)$$

式 (3・61), (3・62), (3・63), (3・64) を用いれば、式 (3・60) は次式のように書きなおすことができる。

$$\begin{aligned} (\pm B_{il}^{(\alpha)} U_{(\alpha)} + 2U_{(\alpha)}^2 \delta_{il}) \frac{da_l^{(\alpha)}}{dt} &= \mu_{il}^{(\alpha)} a_l^{(\alpha)} + \lambda_{ilm}^{(\alpha)} a_l^{(\alpha)} a_m^{(\alpha)} \\ &+ (A_{il}^{(\alpha)} \mp B_{il}^{(\alpha)} U_{(\alpha)} - U_{(\alpha)}^2 \delta_{il}) [\dot{F}_{l1,1}^{(\alpha)}]_\alpha \end{aligned} \quad (3 \cdot 66)$$

一方、以上のような変形場における式 (3・48) は、式 (3・50) を考慮して次式のように表わせる。

$$(A_{il}^{(\alpha)} \mp B_{il}^{(\alpha)} U_{(\alpha)} - U_{(\alpha)}^2 \delta_{il}) a_l^{(\alpha)} = 0 \quad (3 \cdot 67)$$

また、式 (3・51) は次式となる。

$$\det |A_{il}^{(\alpha)} \mp B_{il}^{(\alpha)} U_{(\alpha)} - U_{(\alpha)}^2 \delta_{il}| = 0 \quad (3 \cdot 68)$$

以下では、 $A_{il}^{(\alpha)}$ と $B_{il}^{(\alpha)}$ がともに対称テンソルになるような場合を考え、式(3・68)の固有値とし、 $\alpha=1, 2$ に対し、各々相異なる6個の実根が求まる場合のみを考えることにする。いま α 相の β 番目の固有値を $U_{(\alpha)\beta}$ とし、これに対応する式(3・67)の左固有ベクトルを $\{\beta b_l^{(\alpha)}\}$ とすれば次式をうる。

$$\beta b_i^{(\alpha)} (A_{il}^{(\alpha)} \mp B_{il}^{(\alpha)} U_{(\alpha)\beta} - U_{(\alpha)\beta}^2 \delta_{il}) = 0 \quad (3\cdot69)$$

一方、 $A_{il}^{(\alpha)}$ と $B_{il}^{(\alpha)}$ の対称性の仮定より $a_l^{(\alpha)}$ と $\beta b_l^{(\alpha)}$ との間には次式が成立する。

$$a_l^{(\alpha)} = \sigma_\beta^{(\alpha)} \cdot \beta b_l^{(\alpha)} \quad (3\cdot70)$$

式(3・66)の両辺に $\{\beta b_l^{(\alpha)}\}$ を左から乗じ、式(3・69)の関係を考慮すれば次式をうる。

$$\beta b_i^{(\alpha)} (A_{il}^{(\alpha)} + U_{(\alpha)\beta}^2 \delta_{il}) \frac{da_l^{(\alpha)}}{dt} = \beta b_i^{(\alpha)} \mu_{il}^{(\alpha)} a_l^{(\alpha)} + \beta b_i^{(\alpha)} \lambda_{ilm}^{(\alpha)} a_l^{(\alpha)} a_m^{(\alpha)} \quad (3\cdot71)$$

式(3・71)に式(3・70)の関係を代入し整理すれば次式の関係をうる。

$$H_\beta^{(\alpha)} \frac{d\sigma_\beta^{(\alpha)}}{dt} = E_\beta^{(\alpha)} \sigma_\beta^{(\alpha)} + D_\beta^{(\alpha)} \sigma_\beta^{(\alpha)2} \quad (3\cdot72)$$

ここに、 $H_\beta^{(\alpha)}$ 、 $E_\beta^{(\alpha)}$ 、 $D_\beta^{(\alpha)}$ は次式で与えられるような関数である。

$$\left. \begin{aligned} H_\beta^{(\alpha)} &= \beta b_i^{(\alpha)} (A_{il}^{(\alpha)} + U_{(\alpha)\beta}^2 \delta_{il}) \beta b_l^{(\alpha)} \\ E_\beta^{(\alpha)} &= \beta b_i^{(\alpha)} \mu_{il}^{(\alpha)} \beta b_l^{(\alpha)} - \beta b_i^{(\alpha)} A_{il}^{(\alpha)} \frac{d}{dt} (\beta b_l^{(\alpha)}) \\ D_\beta^{(\alpha)} &= \beta b_i^{(\alpha)} \lambda_{ilm}^{(\alpha)} \beta b_l^{(\alpha)} \beta b_m^{(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (3\cdot73)$$

式(3・72)を積分して次式をうる。

$$\frac{\sigma_\beta^{(\alpha)}(t)}{\sigma_\beta^{(\alpha)}(0)} = \frac{\exp(\phi_{(\alpha)}(t))}{1 - \sigma_\beta^{(\alpha)}(0) I_{(\alpha)}(t)} \quad (3\cdot74)$$

ここに、 $\sigma_\beta^{(\alpha)}(0)$ は $\sigma_\beta^{(\alpha)}(t)$ の初期条件であり、 $\phi_{(\alpha)}(t)$ 、 $I_{(\alpha)}(t)$ は次式で与えられる。

$$\phi_{(\alpha)}(t) = \int_0^t \frac{E_\beta^{(\alpha)}(\tau)}{H_\beta^{(\alpha)}(\tau)} d\tau, \quad I_{(\alpha)}(t) = \int_0^t \frac{D_\beta^{(\alpha)}(\tau)}{H_\beta^{(\alpha)}(\tau)} e^{-\phi_{(\alpha)}(\tau)} d\tau \quad (3\cdot75)$$

式(3・74)は各相に独立に成立する式であり、かつ $\sigma_\beta^{(1)} \sigma_\beta^{(2)}$ のような積の項がないことから、

各相を伝わる加速度波の振幅は相互作用をしないことがわかる。しかし、これから、ある相を伝播する加速度波の振幅に他相の物体が影響を与えないという事はできない。式(3・75)で定義される $\phi_{(\alpha)}(t)$ は波動の伝わっている相の物性だけでは決定できないからである。

この場合、式(3・74)で表わされる解の性状を Coleman 等¹²⁾による方法で分類すると以下のようになる。

$\phi_{(\alpha)}(t)$, $I_{(\alpha)}(t)$ は $0 \leq t < t_0$ で連続で $t \rightarrow t_0$ のとき有限値 $\phi_{(\alpha)}(t_0)$, $I_{(\alpha)}(t_0)$ をもち、 $I_{(\alpha)}(t)$ は $0 \leq t \leq t_0$ で単調関数とすれば

- ① $\text{sgn } \sigma_{\beta}^{(\alpha)}(0) = -\text{sgn } I_{(\alpha)}(t)$ あるいは、 $\text{sgn } \sigma_{\beta}^{(\alpha)}(0) = \text{sgn } I_{(\alpha)}(t)$ でも $1 - \sigma_{\beta}^{(\alpha)}(0) I_{(\alpha)}(t_0) > 0$ なら、 $\sigma_{\beta}^{(\alpha)}(t)$ は $[0, t_0]$ で有限値をもつ。
- ② $\text{sgn } \sigma_{\beta}^{(\alpha)}(0) = \text{sgn } I_{(\alpha)}(t)$ かつ $1 - \sigma_{\beta}^{(\alpha)}(0) I_{(\alpha)}(t_0) < 0$ なら、 $\sigma_{\beta}^{(\alpha)}(t)$ は $(0, t_0)$ の領域で無限大になる。
- ③ $\text{sgn } \sigma_{\beta}^{(\alpha)}(0) = \text{sgn } I_{(\alpha)}(t)$ かつ $1 - \sigma_{\beta}^{(\alpha)}(0) I_{(\alpha)}(t_0) = 0$ なら、 $\sigma_{\beta}^{(\alpha)}(t)$ は $[0, t_0]$ で連続で $t \rightarrow t_0$ のとき単調に無限大になる。

3・5・3 一次元的加速度波の消長

以上一定方向に伝播する平面的な加速度波の振幅について述べたが、振幅の消長におよぼす温度の2階微係数の影響については、式(3・62)の仮定を設け、無視していた。以下ではこの制限をなくした場合、加速度波の振幅の消長がどのように変化するかについて考察を加える。なお、これを温度効果と呼ぶことにする。問題を簡単にするため一次元的な波動のみを取り扱う。

一次元的な波動を考えるから、各変量の成分を表わす添字は省略し、相を表わす (α) はすべて下付添字とする。式(3・60)より一次元加速度波の振幅 $a_{(\alpha)}$ を支配する方程式は次式のようなになる。

$$\begin{aligned} (\pm C_{(\alpha)} U_{(\alpha)} + 2U_{(\alpha)}^2) \frac{d a_{(\alpha)}}{dt} = \mu_{(\alpha)} a_{(\alpha)} + \lambda_{(\alpha)} a_{(\alpha)}^2 \\ + (Q_{(\alpha)} \mp C_{(\alpha)} U_{(\alpha)} - U_{(\alpha)}^2) \left[\frac{\partial \dot{F}_{(\alpha)}}{\partial X_{(\alpha)}} \right]_{\alpha} + \frac{1}{\rho_{0(\alpha)}} \frac{\partial P_{(\alpha)}}{\partial T} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial X_{(\alpha)} \partial t} \right]_{\alpha} \end{aligned} \quad (3 \cdot 76)$$

一方、式(3・51)より特性方程式は次式となる。

$$U_{(\alpha)}^2 \pm C_{(\alpha)} U_{(\alpha)} - Q_{(\alpha)} = 0 \quad (3 \cdot 77)$$

したがって、式(3・76)は次式となる。

$$(Q_{(\alpha)} + U_{(\alpha)}^2) \frac{da_{(\alpha)}}{dt} = \mu_{(\alpha)} a_{(\alpha)} + \lambda_{(\alpha)} a_{(\alpha)}^2 + \frac{1}{\rho_{0(\alpha)}} \frac{\partial P_{(\alpha)}}{\partial T} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial X_{(\alpha)} \partial t} \right]_{\alpha} \quad (3 \cdot 78)$$

ここに, $\mu_{(\alpha)}$, $\lambda_{(\alpha)}$ は式 (3.57), (3.58), (3.61) より次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \rho_{0(\alpha)} \mu_{(\alpha)} = & \frac{\partial^2 P_{(\alpha)}}{\partial F_{(\beta)} \partial F_{(\alpha)}} \dot{F}_{(\beta)} + \frac{\partial^2 P_{(\alpha)}}{\partial F_{(\beta)} \partial v} \dot{F}_{(\beta)} U_{(\alpha)} - \frac{\partial^2 P_{(\alpha)}}{\partial F_{(\alpha)}^2} \left(\frac{\partial F_{(\alpha)}}{\partial X_{(\alpha)}} \right)^+ U_{(\alpha)} \\ & + \frac{\partial^2 P_{(\alpha)}}{\partial F_{(\alpha)}^2} \dot{F}_{(\alpha)}^+ + \frac{\partial^2 P_{(\alpha)}}{\partial v \partial F_{(\alpha)}} \left(\frac{\partial F_{(\alpha)}}{\partial X_{(\alpha)}} \right)^+ U_{(\alpha)}^2 \pm \frac{\partial^2 P_{(\alpha)}}{\partial v \partial F_{(\alpha)}} \ddot{x}_{(\alpha)}^+ \\ & \mp 2 \frac{\partial^2 P_{(\alpha)}}{\partial F_{(\alpha)} \partial v} \dot{F}_{(\alpha)}^+ U_{(\alpha)} + \frac{\partial^2 P_{(\alpha)}}{\partial v^2} \dot{F}_{(\alpha)}^+ U_{(\alpha)}^2 - \frac{\partial^2 P_{(\alpha)}}{\partial v^2} \ddot{x}_{(\alpha)}^+ U_{(\alpha)} \\ & \mp \pi \operatorname{sgn}(F_{(\alpha)}) U_{(\alpha)} \mp J_{(\alpha)} \frac{\partial \pi}{\partial F_{(\alpha)}} U_{(\alpha)} \pm J_{(\alpha)} \frac{\partial \pi}{\partial v} U_{(\alpha)}^2 \\ & - 3 U_{(\alpha)} \frac{dU_{(\alpha)}}{dt} + \frac{\partial P_{(\alpha)}}{\partial v} \frac{dU_{(\alpha)}}{dt} \end{aligned} \quad (3 \cdot 79)$$

$$\rho_{0(\alpha)} \lambda_{(\alpha)} = - \frac{\partial^2 P_{(\alpha)}}{\partial F_{(\alpha)}^2} U_{(\alpha)} \pm 2 \frac{\partial^2 P_{(\alpha)}}{\partial v \partial F_{(\alpha)}} U_{(\alpha)}^2 - \frac{\partial^2 P_{(\alpha)}}{\partial v^2} U_{(\alpha)}^3 \quad (3 \cdot 80)$$

式 (3.78) の右辺第 3 項の $\text{jump} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial X_{(\alpha)} \partial t} \right]_{\alpha}$ の値をエネルギーの釣合式を用いて, 加速度波の振幅の関数として表示する。式 (3.16) より一次元的なエネルギーの釣合式は次式のように表わされる。

$$\rho r + \pi(v_{(1)} - v_{(2)}) + \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \frac{1}{F_{(\alpha)}} \frac{\partial q}{\partial X_{(\alpha)}} + \rho \rho_{(\alpha)} \frac{D^{(\alpha)} \varepsilon}{Dt} + \frac{1}{J_{(\alpha)}} P_{(\alpha)} \dot{F}_{(\alpha)} \right\} = 0 \quad (3 \cdot 81)$$

式 (3.81) の両辺の jump をとると次式をうる。

$$- \frac{1}{F_{(\alpha)}} \left[\frac{\partial q}{\partial X_{(\alpha)}} \right]_{\alpha} + \rho \rho_{\alpha} \left[\frac{D^{(\alpha)} \varepsilon}{Dt} \right]_{\alpha} + \frac{1}{J_{(\alpha)}} P_{(\alpha)} [\dot{F}_{(\alpha)}]_{\alpha} = 0 \quad (3 \cdot 82)$$

式 (3.44) より $\varepsilon = \varepsilon(T, F_{(\alpha)})$, $q = q(T, F_{(\alpha)}, v, g)$ となるから, 式 (3.82) でこの関係を考慮し式 (3.23) の関係を用いると次式をうる。

$$\frac{\partial q}{\partial g} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial X_{(\alpha)}^2} \right]_{\alpha} = \left(- \frac{\partial q}{\partial F_{(\alpha)}} \pm \frac{\partial q}{\partial v} U_{(\alpha)} - \rho \rho_{(\alpha)} F_{(\alpha)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial F_{(\alpha)}} U_{(\alpha)} \right)$$

$$\mp \rho \rho_{(\alpha)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} U_{(\alpha)}^2 - \frac{F_{(\alpha)}}{J_{(\alpha)}} P_{(\alpha)} U_{(\alpha)}) a_{(\alpha)} \quad (3.83)$$

式(3.50)で示した同温過程の仮定と、式(3.22)の1次元表示式に $\phi_{(\alpha)} = T$ とおくことによって次式をうる。

$$[\ddot{T}]_{\alpha} = -U_{(\alpha)} \left[\frac{\partial \dot{T}}{\partial X_{(\alpha)}} \right]_{\alpha} = U_{(\alpha)}^2 \left[\frac{\partial^2 T}{\partial X_{(\alpha)}^2} \right]_{\alpha} \quad (3.84)$$

式(3.83)と(3.84)より次式をうる。

$$\frac{1}{\rho_{0(\alpha)}} \frac{\partial P_{(\alpha)}}{\partial T} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial X_{(\alpha)}} \right]_{\alpha} = \theta_{(\alpha)} a_{(\alpha)} \quad (3.85)$$

ここに

$$\begin{aligned} \theta_{(\alpha)} = & \frac{1}{\rho_{0(\alpha)}} \frac{\partial P_{(\alpha)}}{\partial T} \frac{U_{(\alpha)}}{\frac{\partial q}{\partial q}} \left(\frac{\partial q}{\partial F_{(\alpha)}} \mp \frac{\partial q}{\partial v} U_{(\alpha)} + \rho \rho_{(\alpha)} F_{(\alpha)} \frac{\partial P_{(\alpha)}}{\partial F_{(\alpha)}} U_{(\alpha)} \mp \rho \rho_{(\alpha)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} U_{(\alpha)}^2 \right. \\ & \left. + \frac{F_{(\alpha)}}{J_{(\alpha)}} P_{(\alpha)} U_{(\alpha)} \right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

式(3.85)を用い式(3.78)より $[\partial T^2 / \partial t \partial X_{(\alpha)}]_{\alpha}$ を消去すると、一次元的加速度波の振幅を支配する方程式として次式をうる。

$$(Q_{(\alpha)} + U_{(\alpha)}^2) \frac{da_{(\alpha)}}{dt} = (\mu_{(\alpha)} + \theta_{(\alpha)}) a_{(\alpha)} + \lambda_{(\alpha)} a_{(\alpha)}^2 \quad (3.87)$$

ここに、 $\theta_{(\alpha)}$ は温度の影響を表わす係数である。振幅 $a_{(\alpha)}$ は式(3.87)を積分することにより次式のように与えられる。

$$\frac{a_{(\alpha)}(t)}{a_{(\alpha)}(0)} = \frac{\exp(\phi_{(\alpha)}(t))}{1 - a_{(\alpha)}(0) I_{(\alpha)}(t)} \quad (3.88)$$

ここに、 $a_{(\alpha)}(0)$ は $a_{(\alpha)}(t)$ の初期値であり、 $\phi_{(\alpha)}(t)$ ならびに $I_{(\alpha)}(t)$ は次式のように与えられる。

$$\phi_{(\alpha)}(t) = \int_0^t \frac{\mu_{(\alpha)} + \theta_{(\alpha)}}{Q_{(\alpha)} + U_{(\alpha)}^2} d\tau, \quad I_{(\alpha)}(t) = \int_0^t \frac{\lambda_{(\alpha)}}{Q_{(\alpha)} + U_{(\alpha)}^2} e^{-\phi_{(\alpha)}(\tau)} d\tau \quad (3.89)$$

式(3・88)の解の性質は式(3・74)の場合と同様に分類できるので省略する。なお、温度効果を見放した場合は解は $\phi_{(a)}(t)$ 中の $\mu_{(a)} + \theta_{(a)}$ を $\mu_{(a)}$ に置き換えるだけで求まる。

いま⁽¹⁾相中を正の方向に伝わる加速度波が静止した均一な場へ進入する場合を考える。この場合には、 $\dot{F}_{(1)}^+$, $(\partial F_{(1)}/\partial X_{(1)})^+$, $\ddot{x}_{(1)}^+$ ならびに $\dot{x}_{(1)}$ は0となり $F_{(1)}$ は一定値となるから、 $Q_{(1)}$, $U_{(1)}$, $\mu_{(1)}$, $\lambda_{(1)}$ ならびに $\theta_{(1)}$ は時間 t に無関係な定数になる。これから、式(3・88)ならびに式(3・79)は次式のように書きなおせる。

$$\frac{a_{(1)}(t)}{a_{(1)}(0)} = \frac{(\mu_{(1)} + \theta_{(1)})/\lambda_{(1)}}{\{(\mu_{(1)} + \theta_{(1)})\lambda_{(1)} + a_{(1)}(0)\} \exp\left\{-\frac{\mu_{(1)} + \theta_{(1)}}{Q_{(1)} + U_{(1)}^2} t\right\} - a_{(1)}(0)} \quad (3 \cdot 90)$$

$$\rho_{0(1)} \mu_{(1)} = -\pi \operatorname{sgn}(F_{(1)}) U_{(1)} - |F_{(1)}| \frac{\partial \pi}{\partial F_{(1)}} U_{(1)} + |F_{(1)}| \frac{\partial \pi}{\partial v} U_{(1)}^2 \quad (3 \cdot 91)$$

式(3・90)では $\mu_{(1)}$ と $\theta_{(1)}$ が $\mu_{(1)} + \theta_{(1)}$ なる関係式のみで含まれる。一方、式(3・91)より $\mu_{(1)}$ は拡散力 π のみに関係しており、 $\theta_{(1)}$ は式(3・85)より温度効果を表わす変数であるから、拡散力ならびに温度効果は加速度波の振幅に同等な影響を与えることが明らかになる。

もし、拡散力と温度効果が見放できるならば、式(3・87)の積分は次式となる。

$$\frac{a_{(1)}(t)}{a_{(1)}(0)} = \frac{a_{(1)}(0)}{1 - a_{(1)}(0) \frac{X_{(1)}}{Q_{(1)} + U_{(1)}^2} t} \quad (3 \cdot 92)$$

式(3・90)と式(3・92)を比較すると、拡散力ならびに温度効果は加速度波の振幅の消長に大きな影響を与えることが判明する。

3・6 結 論

本章では飽和土中を伝わる非線形波動の性質を調べるため、土を2相混合体と考え、加速度波を対象とし、混合体中を伝播する不連続面の伝播速度とその振幅の消長について考察を加えた。得られた結論を要約すると以下のようなものである。

(1) 特殊な初期条件が与えられると、構成関係に変形こう配の空間ならびに時間の1回微分が入る場合にも加速度波が伝播できる。

(2) 2相系中を伝播する加速度波は各相を独立に伝播できる。

(3) 構成関係に相対速度が入る場合、2相系を伝播する加速度波動は各相に6個、合計12個の波動が存在でき、拡散力は波動の伝播速度に影響を与えない。

(4) 加速度波の伝播条件から、相対速度の応力におよぼす影響は2次以上のオーダーにならない。

(5) 2相系を伝播する加速度波の振幅を支配する方程式を求め、一定方向へ伝播する平面的加速度波の振幅の時間的挙動を調べた。2相系を構成する物体の物性と初期条件により、振幅は時間とともに増大し発散してしまう場合と、時間とともに減少し滑らかな波動へ遷移する場合とがある。加速度波は、前者の場合には衝撃波に形を変え後者の場合には単純波へとその形態を変化させる。

(6) 一次元的な加速度波を対象とし、拡散力と温度効果の振幅の消長におよぼす影響について考察を加え、両者は振幅の形状ならびに消長に大きな影響を与え、その効果は同等であることを示した。

以上が本章における結論であるが、地盤中を伝わる地震波などの問題を解析してゆくためには、本章で取り扱ったような不連続な解ではなく、地盤内を伝播する非線形調和波動についての特性が明らかにされなければならない。なお、加速度波より不連続性が1階高い衝撃波については今後の研究にまたねばならない。

参 考 文 献

- 1) Truesdell C. and R. Toupin : Handbuch der Phys. III/1, Springer-Verlag, 1960.
- 2) Ericksen J. L. : On the Propagation of Waves in Isotropic Incompressible Perfectly Elastic Materials., J. Rat. Mech. Anal., Vol. 2, pp. 329-337, 1953.
- 3) Truesdell C. : General and Exact Theory of Waves in Finite Elastic Strain., Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 8, pp. 263-296, 1961.
- 4) Green W. A. : The Growth of Plane Discontinuities Propagating into a Homogeneously Deformed Elastic Material., Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 16, pp. 79-88, 1964.
- 5) Chen P. J. : Growth of Acceleration Waves in Isotropic Elastic Materials., J. Acous. Soc. Am. Vol. 43, No. 5, pp. 982-987, 1968.
- 6) Chen P. J. : The Growth of Acceleration Waves of Arbitrary Form in Homogeneously Deformed Elastic Materials., Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 30, pp. 81-89, 1968.
- 7) Bowen R. M. and C. C. Wang : Acceleration Waves in Inhomogeneous Isotropic Elastic Bodies., Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 38, pp. 13-45, 1970.
- 8) Coleman B. D., M. E. Gurtine and I. R. Herrera : I. The Velocity of One-Dimensional Shock and Acceleration Waves., Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 19, pp. 1-19.

1965.

- 9) Coleman B. D. and M. E. Gurtin : IV. Thermodynamics and the Velocity of General Acceleration Waves, *Archive Rat. Mech. Anal.*, Vol. 19, pp. 317–338, 1965.
- 10) Coleman B. D. and M. E. Gurtin : II. On the Growth and Decay of One-Dimensional Acceleration Waves., *Archive Rat. Mech. Anal.*, Vol. 19, pp. 239–265, 1965.
- 11) Coleman B. D. and M. E. Gurtin : III. Thermodynamic Influence of the Growth and Decay of Acceleration Waves., *Archive Rat. Mech. Anal.*, Vol. 19, pp. 266–298, 1965.
- 12) Coleman B. D., J. M. Greenberg and M. E. Gurtin : V. On the Amplitude of Acceleration Waves and Mild Discontinuities., *Archive Rat. Mech. Anal.*, Vol. 22, pp. 333–354, 1968.
- 13) Coleman B. D. and M. E. Gurtin : On the Stability against Shear Waves of Steady Flows of Non-linear Viscoelastic Fluids., *J. Fluid Mech.*, Vol. 33, part 1, pp. 165–181, 1968.
- 14) Tokuoka T. : Generalized Prandtl-Reuss Plastic Materials III. Growth and Decay of Acceleration Waves and Propagating Boundary Surfaces., *Mem. Fac. Engng. Kyoto Univ.*, Vol. 33, pp. 231–241, 1971.
- 15) Bailey P. B. and P. J. Chen : On the Local and Global Behavior of Acceleration Waves., *Archive Rat. Mech. Anal.*, Vol. 41, pp. 121–131, 1971.
- 16) Bailey P. B. and P. J. Chen : On the Local and Global Behavior of Acceleration Waves : Addendum, Asymptotic Behavior., *Archive Rat. Mech. Anal.*, Vol. 44, pp. 212–216, 1972.
- 17) Toupin R. A. and R. S. Bernsteine : Sound Waves in Deformed Perfectly Elastic Materials, Acoustoelastic Effect., *J. Acoustical Soc. Am.*, Vol. 33, No. 2, pp. 216–225, 1961.
- 18) Hayes M. and R. S. Rivline : Propagation of a Plane Wave in an Isotropic Elastic Materials subjected to Pure Homogeneous Deformation., *Archive Rat. Mech. Anal.*, Vol. 8, pp. 15–22, 1961.
- 19) Bland D. R. : On Shock Waves in Hyperelastic Media., *Inter. Sym. Haifa, Israel, Second-order Effect in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics.*, pp. 93–108, 1962.
- 20) Bland D. R. : Dilatational Waves and Shocks in Large Displacement Isentropic Dynamic Elasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 12, pp. 245–267, 1964.

- 21) Bland D. R. : On Shock Structure in a Solid, J. Inst. Math. Applics., Vol. 1, pp. 56–75, 1965.
- 22) Bland L. R. : Plane Isentropic Large Displacement Simple Waves in a Compressible Elastic Solid, Zeit. Ange. Math. Phys., Vol. 16, pp. 752–769, 1965.
- 23) Howard I. C. : Finite Simple Waves in a Compressible Transversly Isotropic Elastic Solid., Quart. J. Mech. Applied Math., Vol. XIX, pt. 3, pp. 329–341, 1966.
- 24) Bland D. R. : Finite Elastrodynamics., J. Inst. Math. Applics., Vol. 2, pp. 327–343, 1966.
- 25) Collins W. D. : One-Dimensional Non-linear Wave Propagation in Incompressible Elastic Materials., Quart. J. Mech. Applied Math., Vol. XIX, pt. 3, pp. 259–328, 1966.
- 26) Craine R. E. : The Quasi-Transverse Constant Profile Wave in Finite Elasticity., Quart. J. Mech. Applied Math., Vol. XXIII, pp. 17–34, 1970.
- 27) Chen P. J. : One Dimensional Shock Waves in Elastic Non-Conductors., Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 43, pp. 350–362, 1972.
- 28) 後藤尚男, 佐藤忠信 : 飽和した多孔質弾性体中を伝播する非線形波動について, 土木学会論文報告集, 第 209 号, pp. 37–50, 1973
- 29) Bowen R. M. : Acceleration and Higher Order Waves in a Mixture of Chemically Reacting Elastic Materials., Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 33, pp. 169–180, 1969.
- 30) Bowen R. M. and P. J. Chen : Acceleration Waves in Chemically Reacting Ideal Fluid Mixture., Archive Rat. Mech. Anal., Vol. 47, pp. 171–187, 1972.
- 31) 土岐憲三, 佐藤忠信 : 二相混合体中における加速度波の性質, 土木学会第 27 回年次学術講演会講演概要 I, pp. 531–534, 1972.
- 32) Toki K. and T. Sato : One-Dimensional Acceleration Waves in a Mixture of 2 Phases., Theoretical and Applied Mechanics Vol. 22, pp. 89–102, 1974.
- 33) Green A. E. and P. M. Naghdi : A Dynamical Theory of Interacting Continua., Int. J. Engng. Sci., Vol. 3, pp. 231–241, 1965.
- 34) Crochet M. J. and P. M. Naghdi : On Constitutive Equations for Flow of Fluid Through an Elastic Solid., Int. J. Engng. Sci., Vol. 4, pp. 383–401, 1966.
- 35) Truesdell C. : The Non-linear Field Theories in Mechanics, Topics in Non-linear Physics., Springer-Verlag, pp. 19–215, 1968.
- 36) 土岐憲三, 佐藤忠信 : 粘弾性体中を伝播する不連続面の性質, 土木学会第 28 回年次学術講演会講演概要 I, pp. 483–484, 1973.

- 37) Bowen R. M. and J. C. Wiese : Diffusion in Mixtures of Elastic Materials., Int. J. Engng. Sci., Vol. 7, pp. 689–722, 1969.

第4章 地盤中を伝播する非線形調和波動

4・1 概 説

地盤中を伝わる非線形波動の性質を調べるため、これまで単純波と不連続面の伝播形態について若干の考察を加えてきたが、^{1,2)} 単純波は解の性質上一定方向に伝わる単調な波動のみしか表現できず、また不連続解は波面 (wave front) の性状のみしか明らかにならないから、地盤内を屈折や反射を繰り返しながら伝播する周期的な波動を取り扱う場合の解の表現形式として用いることは不可能であった。1次元連続体中を単一方向に伝播する非線形調和波動については、Caughey³⁾ が弱い Bi-linear 履歴を有する物体に対し振幅位相除変化法を用いて解析解を求めているが、この解も反射波が存在するような地盤の震動問題に対しては適用できない。

一方、この数年の間に土の動的応力～ひずみ関係の性状が詳しく調べられるようになり、ひずみが $10^{-4} \sim 10^{-3}$ の領域に入ると応力～ひずみ関係の非線形性がかなり大きくなることが明らかになってきたため、^{4~8)} 非線形挙動をする物体中を伝わる周期的な波動の伝播問題を解析する必要が起ってきた。

地盤の振動特性を解析するこれまでの手法は大きく3つに分けることができる。1つは地盤を構成する土を線形弾性体と考え、重複反射理論に基づいて地盤の振動性状を波動論的に取り扱う方法である。⁹⁾ もう1つは、土の動的なひずみ依存性を考慮して複雑な地層構成系の応答解析を行なうために地盤を有限な振動系に置き換え、系の振動性状を調べる方法である。^{10,11)} この場合には剛な基盤面での運動特性を仮定しなければならないから、これによって表層地盤の運動は拘束され、かつ上方の層より基盤層を通じて下方へ伝播する波動による逸散減衰を評価できないという問題がある。3番目の方法は波動論的立場に立ち、土の応力～ひずみ関係の非線形性を考慮して数値解析を行なうものである。これには、土の応力～ひずみ関係を Bi-linear 系と仮定し階差法によって表層地盤の震動特性を解析した岡本、伯野、藤野らの研究、^{12,13)} 土の応力～ひずみ関係を双曲線で近似した Hardin らの結果¹⁴⁾ を用い、特性曲線法を用いることにより、表層地盤内の地震時応力について考察を加えた著者の研究¹⁵⁾ などがあるが、いずれも数値解析であるので非線形解の一般的特性をとらえるにはかなりの計算量を必要とする。

ここでは、非線形有限ひずみおよび減衰機構を含めた波動理論を構成するための試みとして、等価線形化手法を用いることにより、履歴特性を有する物体からなる地盤中を伝わる調和波動の解析的表現を、線形解の表現形式を用いて構成してゆく手法について考察を加える。つぎに

表層と基盤層の2層から構成される地盤を対象として、地盤を構成する土の応力～ひずみ関係が表層の周波数伝達特性におよぼす影響について検討を加える。地盤は水平な成層地盤であり、SH波が反射や透過を繰り返しながら伝播する場合を考えている。なお上方の層より基盤層を通じて下方へ伝播する波動による逸散減衰を評価するため、基盤層は均質な線形粘弾性体からなるものと考えて解の構成を行なっている。

4・2 非線形挙動をする物体中の調和波動

4・2・1 解の構成

地盤を Voigt 形の非線形粘弾性体からなると考え、せん断弾性係数 μ ならびにせん断粘性係数 ν が地盤内に発生しているせん断ひずみの大きさを表わす指標 r_0 と深さ Z の関数で与えられるものとする。すなわち、

$$\mu = \mu(r_0, Z), \quad \nu = \nu(r_0, Z) \quad (4.1)$$

地盤内を地震波のようなランダムな波動が伝わる場合には r_0 の値を一義的に定めることはできないが、単一周波数の調和波が伝播するときには、 r_0 の値として地盤内に発生するひずみの振幅を用いればよい。ここではこのような場合のみについて考える。以下で調和波動という場合には単一周波数成分からなる調和波が伝播することを考えている。

図 4.1 に示したように表層地盤の上から I 番目の層を取り出し、これを n 個の薄層に細分し、この薄層の中では μ ならびに ν が一定値を取るものとする。 μ と ν は r_0 ならびに Z の関数であるが、1つの薄層内では層の適当な位置での値を代表値として用いればこのような仮定が可能になる。以上のような薄層から構成される地盤を考え、重複反射理論を周波数領域で適用し、式(4.1)のような物性をもつ物体中を伝わる調和波動解を求め、その後薄層の層厚を無限小、すなわち、 n を無限大にすることにより非線形調和波動の解を構成する。

いま、 j 番目の薄層での μ, ν の代表値を μ_j, ν_j とすれば、この層内の運動方程式は次式で表わされる。

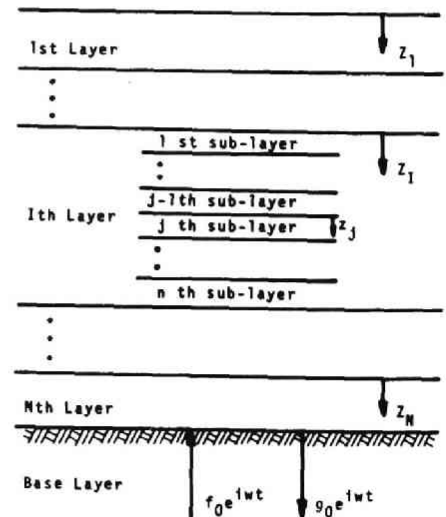


図 4.1 地盤構成

$$\rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \mu_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial z_j^2} + \nu_j \frac{\partial^3 u_j}{\partial t \partial z_j^2} \quad (4.2)$$

ここに、 u_j は水平変位、 ρ_j は密度、 z_j は j 番目の薄層上端から鉛直下方にとった座標軸である。時間変数を次式によって分離する。

$$u_j = U_j e^{i\omega t} \quad (4.3)$$

ここに、 ω は円振動数、 $i = \sqrt{-1}$ である。式 (4.3) を式 (4.2) に代入し、周波数領域での変位 U_j に関する方程式を求めると次式となる。

$$(\mu_j + i\omega\nu_j) \frac{d^2 U_j}{dz_j^2} + \rho_j \omega^2 U_j = 0 \quad (4.4)$$

式 (4.4) の一般解は次式で与えられる。

$$U_j = a_j \exp(ip_j z_j) + b_j \exp(-ip_j z_j) \quad (4.5)$$

ここに

$$p_j^2 = \rho_j \omega^2 / (\mu_j + i\omega\nu_j) \quad (4.6)$$

である。なお a_j , b_j なる変数は j 薄層上端における周波数領域での上昇波と下降波を表わしている。

j 番目の薄層の層厚を h_j とすれば、 $(j-1)$ 番目と j 番目の薄層の境界での変位ならびに応力の連続性より次式が求まる。

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = [t_{j-1}] \begin{pmatrix} a_{j-1} \\ b_{j-1} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

ただし、 $[t_{j-1}]$ は次式で表わされるマトリックスである。

$$[t_{j-1}] = \begin{bmatrix} \xi_{j-1} \exp(ip_{j-1} h_{j-1}) & \eta_{j-1} \exp(-ip_{j-1} h_{j-1}) \\ \eta_{j-1} \exp(ip_{j-1} h_{j-1}) & \xi_{j-1} \exp(-ip_{j-1} h_{j-1}) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

ここに

$$\xi_{j-1} = \frac{1}{2} (1 + \beta_{j-1} / \beta_j) \quad (4.9)$$

$$\eta_{j-1} = \frac{1}{2} (1 - \beta_{j-1} / \beta_j) \quad (4.10)$$

$$\beta_j = (\mu_j + i\omega\nu_j) p_j \quad (4.11)$$

である。式(4・11)で与えられる β_j は周波数領域で考えたインピーダンスであり、 β_{j-1}/β_j は複素インピーダンス比である。

式(4・7)を繰り返し適用することにより次式をうる。

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = [T^I] \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad (4 \cdot 12)$$

ここに、 $[T^I]$ なるマトリックスは次式で与えられる。

$$[T^I] = [t_{j-1}] [t_{j-2}] \cdots [t_2] [t_1] \quad (4 \cdot 13)$$

式(4・5)、(4・12)より各薄層上端での U_j ならびにひずみの周波数領域での表現 τ_j は次式のよ
うに与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U_j |_{z_j=0} &= (T_{11}^I + T_{21}^I) a_1 + (T_{12}^I + T_{22}^I) b_1 \\ \tau_j |_{z_j=0} &= i p_j (T_{11}^I - T_{21}^I) a_1 - i p_j (T_{22}^I - T_{12}^I) b_1 \end{aligned} \right\} \quad (4 \cdot 14)$$

ここに、 T_{lm}^I ($l, m=1, 2$) は $[T^I]$ の成分を表わす。

式(4・8)を式(4・13)に代入し η_j のべき乗順に整理すると次式をうる。

$$\begin{aligned} T_{11}^I &= \prod_{q=1}^{j-1} \xi_q \exp \left\{ i \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k \right\} \\ &+ \sum_{r=2}^{j-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{j-1} \xi_k \exp \left\{ i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} \\ &+ \sum_{t=4}^{j-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{j-1} \xi_k \\ &\cdot \exp \left\{ i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} \\ &+ \sum_{w=6}^{j-1} \sum_{u=5}^{w-1} \sum_{t=4}^{u-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \eta_u \eta_w \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{u-1} \xi_k \prod_{k=u+1}^{w-1} \xi_k \prod_{k=w+1}^{j-1} \xi_k \\ &\cdot \exp \left\{ i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^w p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^u p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} \\ &+ \cdots \cdots \cdots \end{aligned} \quad (4 \cdot 15)$$

$$T_{12}^I = \sum_{q=1}^{j-1} \eta_q \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{j-1} \xi_k \exp \left\{ i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=3}^{j-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{j-1} \xi_k \\
& \cdot \exp \left\{ i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} \\
& + \sum_{u=5}^{j-1} \sum_{t=4}^{u-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \eta_u \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{u-1} \xi_k \prod_{k=u+1}^{j-1} \xi_k, \\
& \cdot \exp \left\{ i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^u p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} \\
& + \dots \dots \dots
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
T_{21}^I &= \sum_{q=1}^{j-1} \eta_q \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{j-1} \xi_k \exp \left\{ -i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} \\
& + \sum_{s=3}^{j-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{j-1} \xi_k \\
& \cdot \exp \left\{ -i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} \\
& + \sum_{u=5}^{j-1} \sum_{t=4}^{u-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \eta_u \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{u-1} \xi_k \prod_{k=u+1}^{j-1} \xi_k \\
& \cdot \exp \left\{ -i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^u p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} \\
& + \dots \dots \dots
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
T_{22}^I &= \prod_{q=1}^{j-1} \xi_q \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k \right\} \\
& + \sum_{r=2}^{j-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{j-1} \xi_k \exp \left\{ -i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} \\
& + \sum_{t=4}^{j-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{j-1} \xi_k \\
& \cdot \exp \left\{ -i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} \\
& + \sum_{w=6}^{j-1} \sum_{u=5}^{w-1} \sum_{t=4}^{u-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \eta_u \eta_w \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{u-1} \xi_k \prod_{k=u+1}^{w-1} \xi_k \prod_{k=w+1}^{j-1} \xi_k \\
& \cdot \exp \left\{ -i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^w p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^u p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} \\
& + \dots \dots \dots
\end{aligned} \tag{4.18}$$

式(4・15)～(4・18)で薄層の分割数を ∞ にする操作¹⁶⁾を行なう。この場合 $\Sigma p_k h_k$ の項は積分表示に変換されるから T_{km}^I は I 層の座標 Z_I の関数として表現できることになる。また ξ_q の相乗積は $\lambda_I(Z_I)$ なる関数に、 η_q は $\kappa_I(Z_I)dZ_I$ なる関数へと変換され次式で表わされるような関係式になる。なお、この関係式の誘導は4.2.3で詳しく述べる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_I(Z_I) &= (\beta_I(0)/\beta_I(Z_I))^{1/2} \\ \kappa_I(Z_I) &= \frac{d\beta_I(Z_I)}{dZ_I} / 2\beta_I(Z_I) \end{aligned} \right\} \quad (4\cdot19)$$

ここに、 $\beta_I(Z_I)$ は I 層の深さ Z_I でのインピーダンスであり、式(4・11)より次式となる。

$$\beta_I(Z_I) = p_I(\tau_0^I(Z_I), Z_I) \cdot \{ \mu_I(\tau_0^I(Z_I), Z_I) + i\omega\nu_I(\tau_0^I(Z_I), Z_I) \} \quad (4\cdot20)$$

上述した操作を行なうことにより、式(4・15)～(4・18)は次式のように書きなおせる。変数に付けた添字 I は I 層での変数を表わしている。

$$\begin{aligned} T_{11}^I(Z_I) &= \lambda_I(Z_I) \left[\exp \left(i \int_0^{Z_I} p_I dw \right) \right. \\ &\quad + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp \{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \} dx_1 dx_2 \\ &\quad + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \\ &\quad \cdot \exp \{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_4} p_I dw + 2i \int_0^{x_3} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw \\ &\quad \quad + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\ &\quad + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_6) \int_0^{x_6} \kappa_I(x_5) \int_0^{x_5} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \\ &\quad \cdot \exp \{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_6} p_I dw + 2i \int_0^{x_5} p_I dw - 2i \int_0^{x_4} p_I dw + 2i \int_0^{x_3} p_I dw \\ &\quad \quad - 2i \int_0^{x_2} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 + \dots \left. \right] \quad (4\cdot21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{12}^I(Z_I) &= \lambda_I(Z_I) \left[\int_0^{Z_I} \kappa_I(x_1) \exp \{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_1} p_I dw \} dx_1 \right. \\ &\quad + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp \{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_3} p_I dw + 2i \int_0^{x_2} p_I dw \\ &\quad \quad - 2i \int_0^{x_1} p_I dw \} dx_1 dx_2 dx_3 + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_5) \int_0^{x_5} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \exp \left\{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_5} p_I dw + 2i \int_0^{x_4} p_I dw - 2i \int_0^{x_3} p_I dw + 2i \int_0^{x_2} p_I dw - 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} \\
& \cdot dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 \\
& + \dots \dots \dots] \quad (4 \cdot 22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{21}^I(Z_I) = & \lambda_I(Z_I) \left[\int_0^{Z_I} \kappa_I(x_1) \exp \left\{ -i \int_0^{Z_I} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} dx_1 \right. \\
& + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp \left\{ -i \int_0^{Z_I} p_I dw + 2i \int_0^{x_3} p_I dw \right. \\
& \left. - 2i \int_0^{x_2} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_5) \int_0^{x_5} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \\
& \cdot \exp \left\{ -i \int_0^{Z_I} p_I dw + 2i \int_0^{x_5} p_I dw - 2i \int_0^{x_4} p_I dw + 2i \int_0^{x_3} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw \right. \\
& \left. + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 \\
& \left. + \dots \dots \dots \right] \quad (4 \cdot 23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{22}^I(Z_I) = & \lambda_I(Z_I) \left[\exp \left(-i \int_0^{Z_I} p_I dw \right) + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp \left\{ -i \int_0^{Z_I} p_I dw + 2i \int_0^{x_2} p_I dw \right. \right. \\
& \left. - 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} dx_1 dx_2 + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \\
& \cdot \exp \left\{ -i \int_0^{Z_I} p_I dw + 2i \int_0^{x_4} p_I dw - 2i \int_0^{x_3} p_I dw + 2i \int_0^{x_2} p_I dw - 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\
& + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_6) \int_0^{x_6} \kappa_I(x_5) \int_0^{x_5} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \\
& \cdot \exp \left\{ -i \int_0^{Z_I} p_I dw + 2i \int_0^{x_6} p_I dw - 2i \int_0^{x_5} p_I dw + 2i \int_0^{x_4} p_I dw - 2i \int_0^{x_3} p_I dw \right. \\
& \left. + 2i \int_0^{x_2} p_I dw - 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 \\
& \left. + \dots \dots \dots \right] \quad (4 \cdot 24)
\end{aligned}$$

以上のように、 I 層の深さ Z_I での $[T^I(Z_I)]$ の表示式が求まるから、式 (4・12) の a_1, b_1 を A_I, B_I とおき変えれば、式 (4・14) より I 層の深さ Z_I での周波数領域での変位 $U_I(Z_I)$ ならびにひずみ $\tau_I(Z_I)$ は次式のように与えられる。

$$U_I(Z_I) = \{T_{11}^I(Z_I) + T_{21}^I(Z_I)\} A_I + \{T_{12}^I(Z_I) + T_{22}^I(Z_I)\} B_I \quad (4 \cdot 25)$$

$$\tau_I(Z_I) = i p_I(Z_I) \{T_{11}^I(Z_I) - T_{21}^I(Z_I)\} A_I - i p_I(Z_I) \{T_{12}^I(Z_I) - T_{22}^I(Z_I)\} B_I \quad (4 \cdot 26)$$

ここに、 A_I, B_I は I 層上端における周波数領域での上昇波と下降波を表わす変数で境界条件より定まる定数である。なお式 (4・12) より、深さ Z_I での上昇波は次式で表わされ

$$T_{11}^I(Z_I) A_I + T_{12}^I(Z_I) B_I \quad (4・27)$$

下降波は次式となる。

$$T_{21}^I(Z_I) A_I + T_{22}^I(Z_I) B_I \quad (4・28)$$

いま

$$r_I(Z_I) = r_0^I(Z_I) e^{i\theta_I(Z_I)} \quad (4・29)$$

とすれば、 $r_0^I(Z_I)$ は I 層の深さ Z_I でのせん断ひずみ振幅になり、 $\theta_I(Z_I)$ は入射波とひずみの位相差を表わすことになる。

以上で式 (4・1) のような物性をもつ物体中を伝播する非線形調和波動の解が表現できたわけであるが、式 (4・21) ～ (4・24) で表わされるマトリックス $[T^I(Z_I)]$ の成分は $\beta_I(Z_I)$ ならびに $p_I(Z_I)$ の複雑な関数となっている。これらの値は式 (4・20) などから明らかなようにひずみ振幅 $r_0^I(Z_I)$ の関数として表わされるから、式 (4・21) ～ (4・24) の積分を直接行なうことはできない。ここでは $r_0^I(Z_I)$ の第 1 次近似として線形解の値をとり、これを用いて $\beta_I(Z_I)$ と $p_I(Z_I)$ を計算し、式 (4・21) ～ (4・24) に代入しその数値積分を行ない $[T^I(Z_I)]$ を求める。この $[T^I(Z_I)]$ を用い $r_0^I(Z_I)$ を計算し、ふたたび数値積分を行なって $[T^I(Z_I)]$ を計算する。このような計算を繰り返し $r_0^I(Z_I)$ がある一定の精度内に入るまで繰り返し計算を行なうことにより非線形解を構成する。このような操作を行なうためには、境界条件より、式 (4・25) に現われる未定係数 A_I ならびに B_I の値を定めなければならない。これについては以下で詳述する。

4・2・2 波動伝達特性の表現

以上のように、 I 層での非線形調和波動の一般解が表現できたので、以下一般解に現われる未定係数 A_I, B_I の値を入射波によって表わす。

I 層と $(I+1)$ 層の境界では変位と応力の連続性を満^たさなければならないから次式をうる。

$$\begin{pmatrix} A_{I+1} \\ B_{I+1} \end{pmatrix} = [R_I] [T^I(H_I)] \begin{pmatrix} A_I \\ B_I \end{pmatrix} \quad (4・30)$$

ただし

$$[R_I] = \begin{bmatrix} \frac{1+\alpha_I}{2} & \frac{1-\alpha_I}{2} \\ \frac{1-\alpha_I}{2} & \frac{1+\alpha_I}{2} \end{bmatrix} \quad (4\cdot31)$$

ここに

$$\alpha_I = \{\mu_I(H_I) + i\omega\nu_I(H_I)\}p_I(H_I) / \{\mu_{I+1}(0) + i\omega\nu_{I+1}(0)\}p_{I+1}(0) \quad (4\cdot32)$$

式(4・30)を順次繰り返し用いることにより次式をうる。

$$\begin{pmatrix} A_{I+1} \\ B_{I+1} \end{pmatrix} = [M^I(\omega)] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (4\cdot33)$$

ここに

$$[M^I(\omega)] = [R_I] [T^I(H_I)] \cdots [R_2] [T^2(H_2)] [R_1] [T^1(H_1)] \quad (4\cdot34)$$

なお、 $I=N$ としたときの A_{N+1} , B_{N+1} は基盤層上端での周波数領域での上昇波と下降波を表わしている。

(1) 基盤層の上昇波が既知の場合

地表面でせん断応力が0になることより

$$A_1 = B_1 \quad (4\cdot35)$$

をうる。いま基盤層上端での上昇波として f_0 なる振幅をもつ調和波動が与えられると、式(4・33)で $A_{N+1} = f_0$, $B_{N+1} = g_0$ とおくことにより次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_1/f_0 &= 1/\{M_{11}^N(\omega) + M_{12}^N(\omega)\} \\ g_0/f_0 &= \{M_{21}^N(\omega) + M_{22}^N(\omega)\}/\{M_{11}^N(\omega) + M_{12}^N(\omega)\} \end{aligned} \right\} \quad (4\cdot36)$$

地表面の周波数領域での変位は $U_1(0) = A_1 + B_1$ と表わせるから、 $2A_1/f_0$ は f_0 なる入力に対する表層地盤の複素伝達関数になる。

(2) 地表面での変形が既知の場合

基盤層から波動が入射し、地表面での変形が $U_s e^{i\omega t}$ なる調和波で与えられるとすれば次式をうる。

$$A_1 + B_1 = U_s \quad (4\cdot37)$$

式(4・35), (4・37)を、式(4・33)において $I=N$ とおいた式に代入すれば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} A_{N+1}/U_s &= \frac{1}{2} \{M_{11}^N(\omega) + M_{12}^N(\omega)\} \\ B_{N+1}/U_s &= \frac{1}{2} \{M_{21}^N(\omega) + M_{22}^N(\omega)\} \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

(3) 地表面で強制変位を受ける場合

地表面の強制変位が $U_f e^{i\omega t}$ なる調和波で与えられ、この運動によるエネルギーが基盤層を通じ鉛直下方へ逸散しているものとする。この場合、基盤層内では下降波しか存在しないから、次式をうる。

$$A_{N+1} = 0 \quad (4.39)$$

一方、地表面では次式が成立する。

$$A_1 + B_1 = U_f \quad (4.40)$$

式(4.39)、(4.40)を、式(4.33)において $I=N$ とおいた式に代入すれば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= U_f M_{12}^N(\omega) / \{M_{12}^N(\omega) - M_{11}^N(\omega)\} \\ B_1 &= -U_f M_{11}^N(\omega) / \{M_{12}^N(\omega) - M_{11}^N(\omega)\} \\ B_{N+1} &= U_f \{M_{12}^N(\omega) M_{21}^N(\omega) - M_{11}^N(\omega) M_{22}^N(\omega)\} / \{M_{12}^N(\omega) - M_{11}^N(\omega)\} \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

いま、地盤が単一の層から成り立ち、基盤層が存在しないような場合を考えると、地表面では上昇波が0にならなければならないから、式(4.27)で $I=1$, $Z_1=0$ と置き $T_{12}^1(0)=0$ なることを考慮すれば次式をうる。

$$A_1 = 0 \quad (4.42)$$

したがって、この場合には次式となる。

$$B_1 = U_f \quad (4.43)$$

すなわち、任意深さでの上昇波と下降波は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \text{上昇波} &: U_f T_{12}^1(Z_1) \\ \text{下降波} &: U_f T_{22}^1(Z_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

(4) 地表面で強制力を受ける場合

地表面での強制力が $\tau_0 e^{i\omega t}$ で与えられ、基盤層が存在する場合には、基盤層で式(4.39)が

成立し地表面では次式が成立する。

$$i \mu_1(0) p_1(0) (A_1 - B_1) = \tau_0 \quad (4.45)$$

式(4.39), (4.45)を $I = N$ とした式(4.33)に代入し次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \tau_0 M_{12}^N(\omega) / i \mu_1(0) p_1(0) \{M_{12}^N(\omega) + M_{11}^N(\omega)\} \\ B_1 &= -\tau_0 M_{11}^N(\omega) / i \mu_1(0) p_1(0) \{M_{12}^N(\omega) + M_{11}^N(\omega)\} \\ B_{N+1} &= \tau_0 \{M_{12}^N(\omega) M_{21}^N(\omega) - M_{11}^N(\omega) M_{22}^N(\omega)\} / i \mu_1(0) p_1(0) \{M_{12}^N(\omega) + M_{11}^N(\omega)\} \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

また、地盤が単一層からなり基盤層が存在しない場合の上昇波と下降波はそれぞれ次式となる。

$$\left. \begin{aligned} -\tau_0 T_{12}^1(Z_1) / i \mu_1(0) p_1(0) & \quad (\text{上昇波}) \\ -\tau_0 T_{22}^1(Z_1) / i \mu_1(0) p_1(0) & \quad (\text{下降波}) \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

4.2.3 $\lambda_I(Z_I)$, $\kappa_I(Z_I)$ に関する考察

表層地盤の I 番目の層内のせん断弾性係数ならびにせん断粘性係数が深さ Z_I に関し任意階微分可能な関数とし、これらから構成される複素波数 $p_I(Z_I)$ も同様な性質をもつものとすれば、式(4.20)で表わされる $\beta_I(Z_I)$ も任意階微分可能な複素数値関数となる。いま I 層を n 個の薄層に等分割すれば、各薄層の層厚 h_k は H_I/n と表わされるから、式(4.2)に現われる μ_j , ν_j の代表値として薄層上端での値を取ることにすれば、式(4.11)で定義される β_j は次式によって与えられる。

$$\beta_j = \beta_I(Z_I) \Big|_{Z_I = \sum_{k=1}^{j-1} h_k = H_I(j-1)/n} \quad (4.48)$$

いま、深さ $H_I(j-1)/n$ をあらたに Z_I と表わすことにすれば $\lambda_I(Z_I)$ は ξ_k の無限積により次式のように与えられる。

$$\lambda_I(Z_I) = \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{j-1} \xi_k \quad (4.49)$$

ξ_k は式(4.9)より次式のように表わされる。

$$\xi_k = \frac{\beta_k + \beta_{k+1}}{2\beta_{k+1}} = \left(\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} \right)^{1/2} \right\}^2 \quad (4.50)$$

一方、 β_k/β_{k+1} は次式のように書きなおせる。

$$\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} = \frac{\beta_k}{\beta_k + e_k} = 1 - \frac{e_k}{\beta_k} + O(e_k) \quad (4.51)$$

ここに、 e_k は薄層の分割数が大きくなると 0 に近づくような複素数値変数である。これから、式 (4.50) の右辺第 2 項を ϵ_k とおけば次式のように表わされる。

$$\epsilon_k = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} \right)^{1/2} \right\}^2 = \frac{1}{8} \left(\frac{e_k}{\beta_k} \right)^2 + O(e_k) \quad (4.52)$$

また $\beta_I(Z_I)$ の微分可能性より次式をうる。

$$e_k = \beta'_k \Delta Z_I + O(\Delta Z_I) = \beta'_k \frac{H_I}{n} + O\left(\frac{H_I}{n}\right) \quad (4.53)$$

ここに、 $\Delta Z_I = \frac{H_I}{n}$ 、 $\beta'_k = d\beta_I(Z_I)/dZ_I|_{Z_I=\Delta Z_I(k-1)}$ である。したがって、式 (4.52) は次式のようにになる。

$$\epsilon_k = \frac{1}{8} \left(\frac{\beta'_k}{\beta_k} \right)^2 \left(\frac{H_I}{n} \right)^2 + O\left(\frac{H_I}{n}\right) \quad (4.54)$$

上式を式 (4.50) に代入し次式をうる。

$$\xi_k = \left(\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} \right)^{1/2} + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta'_k}{\beta_k} \right)^2 \left(\frac{H_I}{n} \right)^2 + O\left(\frac{H_I}{n}\right) \quad (4.55)$$

式 (4.55) を式 (4.49) に代入し次式をうる。

$$\begin{aligned} \lambda_I(Z_I) = \lim_{j \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \{ & \left(\frac{\beta_1}{\beta_j} \right)^{1/2} + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta'_1}{\beta_1} \right)^2 \left(\frac{H_I}{n} \right)^2 \left(\frac{\beta_2}{\beta_j} \right)^{1/2} \\ & + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta'_2}{\beta_2} \right)^2 \left(\frac{H_I}{n} \right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{1/2} \left(\frac{\beta_3}{\beta_j} \right)^{1/2} + \dots \\ & + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta'_k}{\beta_k} \right)^2 \left(\frac{H_I}{n} \right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_k} \right)^{1/2} \left(\frac{\beta_{k+1}}{\beta_j} \right)^{1/2} + \dots \\ & + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta'_{j-1}}{\beta_{j-1}} \right)^2 \left(\frac{H_I}{n} \right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_{j-1}} \right)^{1/2} + O\left(\frac{H_I}{n}\right) \} \end{aligned} \quad (4.56)$$

したがって

$$\left| \lambda_I(Z_I) - \left(\frac{\beta_1}{\beta_j} \right)^{1/2} \right| \leq |A| \frac{H_I^2}{n} \frac{j-1}{n} + O\left(\frac{H_I}{n}\right) \quad (4.57)$$

ただし

$$|A| = \max_{1 \leq k \leq j-1} \left\{ \frac{1}{8} \left| \left(\frac{\beta'_k}{\beta_k} \right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_k} \right)^{1/2} \left(\frac{\beta_{k+1}}{\beta_j} \right)^{1/2} \right| \right\} \quad (4.58)$$

式(4.57)で $n \rightarrow \infty$ とすれば $\lim_{j \rightarrow \infty < n \rightarrow \infty} |A| \frac{H_T^2}{n} \frac{j-1}{n} \rightarrow 0$, $\lim_{j \rightarrow \infty < n \rightarrow \infty} \left| O\left(\frac{H_T}{n}\right) \right| \rightarrow 0$ であるから, $\lambda_I(Z_I)$ は $(\beta_1/\beta_j)^{1/2}$ に収束する。式(4.48)より $\beta_1 = \beta_I(0)$, $\beta_j = \beta_I(Z_I)$ とおけるから次式をうる。

$$\lambda_I(Z_I) = \{ \beta_I(0) / \beta_I(Z_I) \}^{1/2} \quad (4.59)$$

$\kappa_I(Z_I) dZ_I$ は η_j より求まり次式で表わされる。

$$\kappa_I(Z_I) dZ_I = \lim_{j \rightarrow \infty < n \rightarrow \infty} \eta_{j-1} \quad (4.60)$$

ただし

$$\eta_{j-1} = \frac{\beta_j - \beta_{j-1}}{2\beta_j} \quad (4.61)$$

$\beta_I(Z_I)$ の微分可能性より

$$\beta_{j-1} = \beta_j - \beta'_j \Delta Z_I + O(\Delta Z_I^2) \quad (4.62)$$

と表わされるから

$$\kappa_I(Z_I) dZ_I = \lim_{j \rightarrow \infty < n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\beta'_j}{2\beta_j} \Delta Z_I + O(\Delta Z_I^2) \right\} \quad (4.63)$$

したがって, $\kappa_I(Z_I)$ として次式をうる。

$$\kappa_I(Z_I) = \frac{\beta'_I(Z_I)}{2\beta_I(Z_I)} \quad (4.64)$$

4.3 応力～ひずみ関係の等価線形化

ここでは, 履歴復元力特性を有する応力～ひずみ関係の等価線形化を行なう。要素は定常な調和振動を行なっているものとし, 等価弾性係数 μ_{eq} は, 各ひずみサイクルのピーク値と原点を結ぶ直線の勾配から求める。等価粘性係数 ν_{eq} は, 各ひずみサイクルのピーク値が τ_0 なる履歴復元力特性をもつ要素の 1 サイクル当りのエネルギー損失と Voigt 形粘弾性体からなる要

素の1サイクル当りのエネルギー損失とを等値することによって求める。

いま、ひずみが振幅 r_0 、周期 $2\pi/\omega$ なる単一調和波で表現されるものとすれば、Voigt 要素の1サイクル当りのエネルギー損失 ΔW_v は次式のように与えられる。

$$\Delta W_v = \pi \nu \omega r_0^2 \quad (4.65)$$

なお、等価減衰定数は次式で定義する。^{17,18)}

$$\zeta_{eq} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W_h}{W_h} \quad (4.66)$$

ここに、 ΔW_h は履歴復元力特性をもつ要素の1サイクル当りのエネルギー損失、 W_h は履歴復元力特性をもつ要素の1サイクル当りに受けわたしされるエネルギーの絶対値である。式(4.66)の定義で問題になるのは W_h の取り方であるが、ここでは等価弾性係数 μ_{eq} を用い次式で与えられるものとする。

$$W_h = \mu_{eq} r_0^2 \quad (4.67)$$

なお、履歴復元力特性をもつ要素の等価粘性係数 ν_{eq} が明らかになれば、式(4.65)を参照し、 ΔW_h は次式のように表わされる。

$$\Delta W_h = \pi \nu_{eq} \omega r_0^2 \quad (4.68)$$

式(4.67)、(4.68)を式(4.66)に代入すれば次式をうる。

$$\zeta_{eq} = \frac{1}{2} \frac{\omega \nu_{eq}}{\mu_{eq}} \quad (4.69)$$

(1) Bi-linear 要素の等価弾性定数と減衰定数

図4.2に示すような Bi-linear な応力～ひずみ関係を考える。この要素は降伏点 (τ_y, γ_y) までは μ_1 なるせん断剛性をもち、降伏後は μ_2 なるせん断剛性を有するものである。この場合1サイクル当りのエネルギー損失 ΔW_h は次式で与えられる。

$$\Delta W_h = 4 \tau_y (\tau_0 - \tau_y) (\mu_1 - \mu_2) \quad (4.70)$$

式(4.65)と(4.70)を等値することにより、 $\omega \nu_{eq}$ が次式のように与えられる。

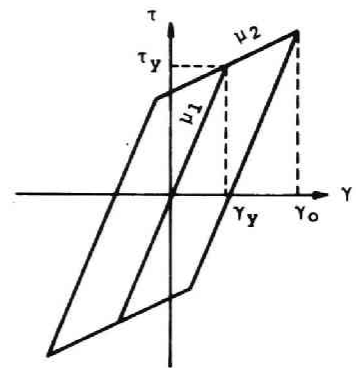


図4.2 Bi-linear 系

$$\omega \nu_{eq} = \frac{4}{\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2} \mu_1 n \quad (4.71)$$

ここに

$$\varepsilon = \frac{\tau_0}{\tau_y}, \quad n = 1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (4.72)$$

等価弾性係数 μ_{eq} は次式で与えられる。

$$\mu_{eq} = \frac{\mu_1}{\varepsilon} \cdot \{1 + (1 - n)(\varepsilon - 1)\} \quad (4.73)$$

なお、式(4.69)で定義される ζ_{eq} は次式で与えられる。

$$\zeta_{eq} = \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2} \frac{\mu_1}{\mu_{eq}} n \quad (4.74)$$

図 4.3 に ζ_{eq} ならびに μ_{eq}/μ_1 と ε の関係を弾塑性傾斜率 n をパラメータとして示した。

(2) Jennings 要素の等価弾性定数と減衰定数

図 4.4 に Jennings によって与えられた履歴特性¹⁹⁾を有する応力～ひずみ関係を示す。skelton ならびに各 branch の曲線の方程式は次式で与えられる。

$$\text{skelton} : \left(\frac{\tau}{\tau_y}\right) = \left(\frac{\tau}{\tau_y}\right) + \alpha \left(\frac{\tau}{\tau_y}\right)^x \quad (4.75)$$

$$\text{branch} : \frac{\tau \pm \tau_0}{2\tau_y} = \frac{\tau \pm \tau_0}{2\tau_y} + \alpha \left(\frac{\tau \pm \tau_0}{2\tau_y}\right)^x \quad (4.76)$$

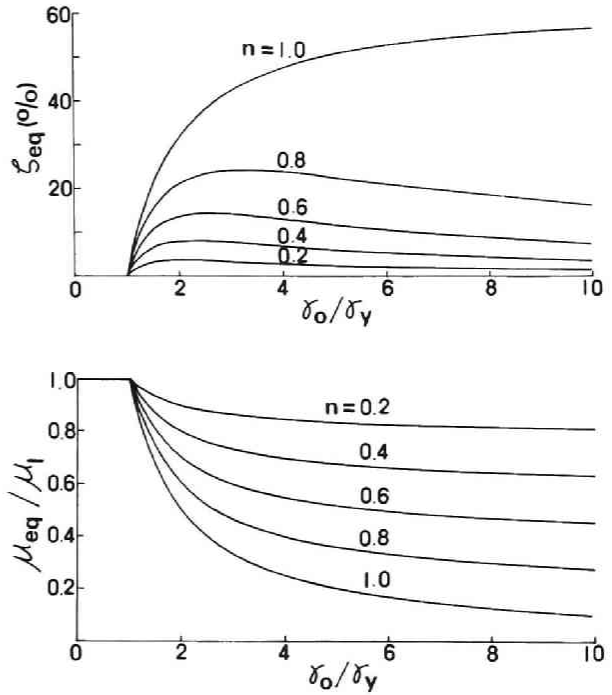


図 4.3 Bi-linear 要素の等価弾性係数 μ_{eq} と等価減衰定数 ζ_{eq}

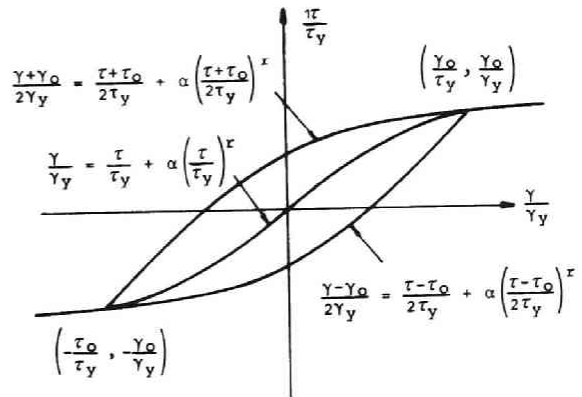


図 4.4 Jennings 系

この場合要素の1サイクル当りのエネルギー損失は次式で与えられる。

$$\Delta W_k = 4\alpha \tau_y \tau_y \left(\frac{r-1}{r+1} \right) \left(\frac{\tau_0}{\tau_y} \right)^{r+1} \quad (4.77)$$

式(4.65)と式(4.77)を等値することによって $\omega \nu_{eq}$ が次式のように与えられる。

$$\omega \nu_{eq} = \frac{4\alpha}{\pi} \frac{\tau_y}{\tau_0^2} \tau_y \left(\frac{r-1}{r+1} \right) \left(\frac{\tau_0}{\tau_y} \right)^{r+1} \quad (4.78)$$

等価弾性定数は次式で与えられる。

$$\mu_{eq} = \tau_0 / \tau_y \quad (4.79)$$

また, ζ_{eq} は次式となる。

$$\zeta_{eq} = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\tau_y}{\tau_0^2} \frac{\tau_y}{\mu_{eq}} \left(\frac{r-1}{r+1} \right) \left(\frac{\tau_0}{\tau_y} \right)^{r+1} \quad (4.80)$$

図4.5, 4.6に ζ_{eq} ならびに μ_{eq}/μ_1 ($\mu_1 = \tau_y/\tau_y$) と $\varepsilon = \tau_0/\tau_y$ の関係を示した。Jennings 要素の特性を定めるパラメータは α と r の2つであるから, 図4.5は $\alpha = 0.1$ とし r を変化させた時のものであり, 図4.6は $r = 3$ とし α を変化させた時のものである。

(3) Hardin 等による土の等価弾性定数と減衰定数

Hardin 等^{5,14)}は砂の中空円筒供試

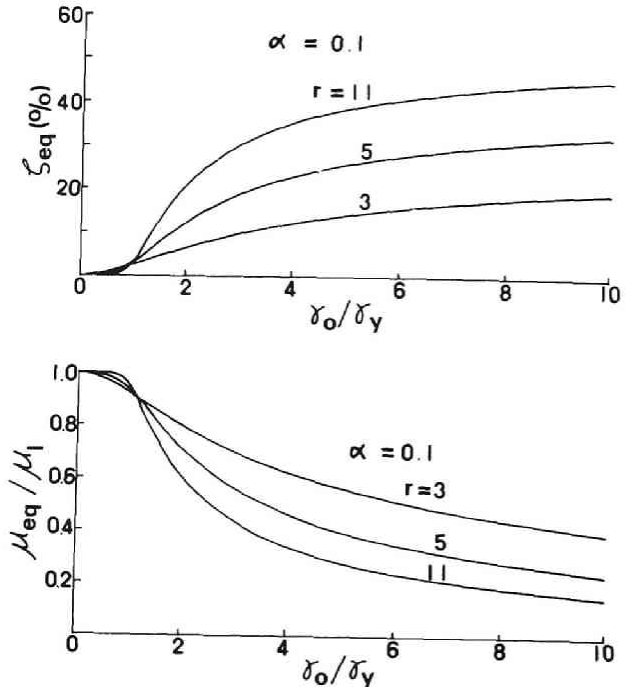


図4.5 Jennings 要素の等価弾性係数 μ_{eq} と等価減衰定数 ζ_{eq} ($\alpha = 0.1, r$ が変化する場合)

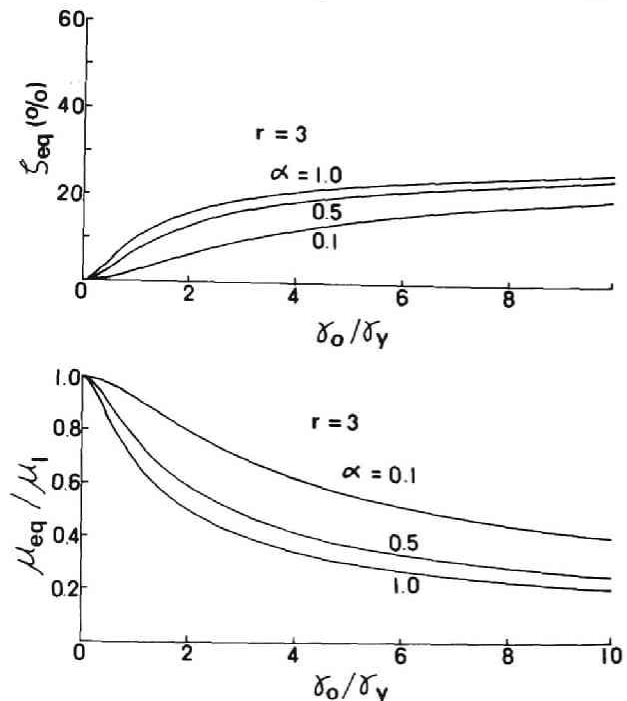


図4.6 Jennings 要素の等価弾性係数 μ_{eq} と等価減衰定数 ζ_{eq} ($r = 3, \alpha$ が変化する場合)

体のねじり単純繰返しせん断試験による多くのデータから、せん断応力とひずみの関係は双曲線によって近似できるとし、せん断弾性係数および減衰定数をひずみ振幅 r_0 の関数として次式のように与えている。

$$\frac{\mu_{eq}}{\mu_1} = \frac{1}{1 + r_0/r_y} \quad (4.81)$$

$$\zeta_{eq} = \frac{\zeta_m r_0/r_y}{1 + r_0/r_y} \quad (4.82)$$

ここに、 r_y は完全弾塑性要素の降伏ひずみに相当する値、 μ_1 は初期せん断弾性係数、 ζ_m は r_0 が非常に大きくなったときの減衰定数である。いま $\alpha_h = 1/r_y$ とおき μ_{eq} と ζ_{eq} におよぼす α_h の効果が異っているものとして式 (4.81)、(4.82) を次式のように書き改める。

$$\frac{\mu_{eq}}{\mu_1} = \frac{1}{1 + \alpha_\mu r_0} \quad (4.83)$$

$$\zeta_{eq} = \frac{\zeta_m \alpha_\zeta r_0}{1 + \alpha_\zeta r_0} \quad (4.84)$$

ここに、 α_μ は弾性係数に対する、 α_ζ は減衰定数に対する非線形度パラメータである。なお砂に対する ζ_{eq} のこれまでの研究結果によれば、 ζ_{eq} は周波数に依存しない値であることがわかっている。²⁰⁾

以上履歴特性を有する要素の等価減衰定数について考察を加えたが、このほかに純粋な粘性にともなう減衰が存在する。いまこれによる減衰定数を ζ_v として、両者を含めた減衰定数 ζ を次式で定義する。

$$\zeta = \zeta_{eq} + \zeta_v \quad (4.85)$$

なお、 ζ_v に関しては、ひずみ速度依存性のものと非依存性のものに分けて考えることにする。この場合、 ζ_v の周波数領域における表現は次式のように表わされることになる。

$$\left. \begin{array}{ll} \zeta_v = \omega h_v \quad (h_v \text{ 一定}) & : \text{ひずみ速度依存性} \\ \zeta_v = \zeta_{vs} \quad (\zeta_{vs} \text{ 一定}) & : \text{ひずみ速度非依存性} \end{array} \right\} \quad (4.86)$$

4・4 数値計算例

4・4・1. 数値解の精度についての検討

以上に述べた解析手法を用い具体的な数値計算を行なう。地盤層は表層と基盤層の2層から構成されるものとした。なお問題を簡単にするため、基盤層は均質な線形弾性体とした。計算に用いた地盤特性を表4.1に示した。式(4・15)～(4・18)に現われる η_j は薄層の数 ∞ になると0へ近づく性質のものであるから、 η_j に関する展開項はあまり高次まで取らなくても良いことが推察される。図4.7は η_j の展開次数を何次まで取れば解の精度が満たされるかについて吟味したものである。数値計算は式(4・21)～(4・24)に基づいて行なっている。応力～ひずみ関係はHardin形のものを用い $\alpha_\mu = \alpha_\zeta = 500$, $\zeta_m = 0.33$, 基盤層上端での上昇波の加速度振幅 f_0 を 20 cm/sec^2 とした場合の地表面の振幅特性 $|2A_1/f_0|$ を η_j の展開次数をパラメータとして示してある。こ

表4.1 地盤構成

表 層	$V_s = 160 \text{ m/sec}$ $\rho g = 2.24 \text{ t/m}^3$ $H = 12 \text{ m}$
基盤層	$V_s = 720 \text{ m/sec}$ $\rho g = 2.30 \text{ t/m}^3$

れから展開次数は2次程度

で十分な数値解を与えることが明らかになる。なお、式(4・21)～(4・24)に現われる積分は数値積分によっているから、積分点の数も問題になる。図4.8は積分点の数が解の精度におよぼす影響について示したものである。計算条件は図4.7の場合と同じものを用いている。これから積分点の数が25程度になれば十分な数値解を与えることがわかる。

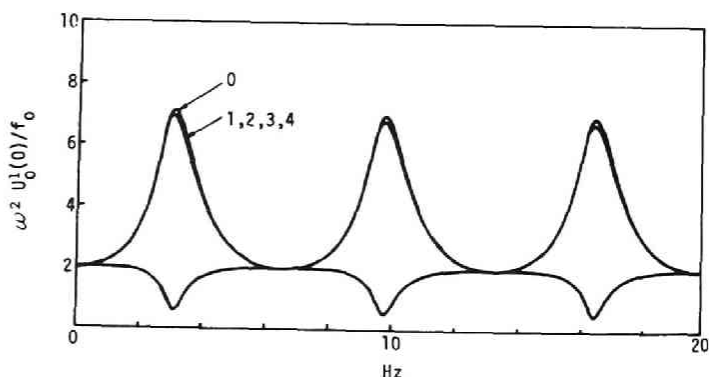


図4.7 η_j の展開次数が応答特性におよぼす影響

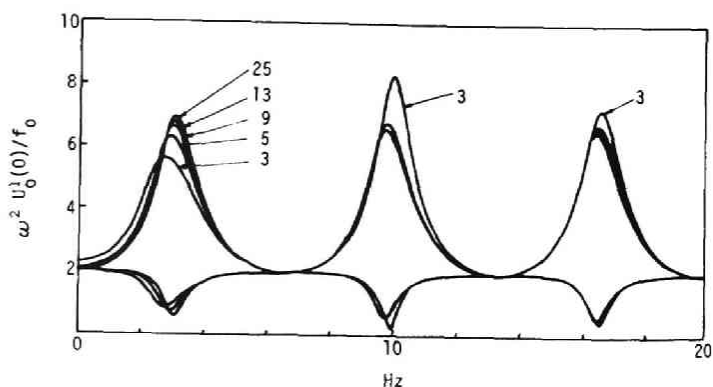


図4.8 積分点数の応答特性におよぼす影響

4・4・2 応力～ひずみ関係が周波数伝達特性におよぼす影響

ここでは、基盤層上端での上昇波の加速度振幅 f_0 が与えられた場合の地表面の加速度応答倍率、その位相特性ならびに基盤層と表層との境界面での加速度応答倍率におよぼす応力～ひずみ関係の影響について考察を加える。これらは式(4・36)を適当に変形することによって次のように与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{地表面での加速度応答倍率 : } \varphi_s = |2A_1/f_0| \\ \text{地表面の応答の入力に対する位相特性 : } \tan^{-1}\{I_m(2A_1/f_0)/R_e(2A_1/f_0)\} \\ \text{表層と基盤層との境界面での加速度応答倍率 : } \varphi_b = |(g_0 + f_0)/f_0| \end{array} \right\} (4\cdot87)$$

なお、地盤特性はすべて表4.1のものと同一ものを用いる。

(1) 応力～ひずみ関係が Bi-linear 要素で与えられる場合

計算に用いた μ_{eq} ならびに ζ_{eq} と r_0/r_y の関係は図4.3で与えられる。図4.9は $f_0 = 50 \text{ cm/sec}^2$, $r_y = 5 \times 10^{-4}$, $\zeta = \zeta_{eq}$ とした場合の地表面の応答特性を弾塑性傾斜率 n をパラメータとして表示したものである。図(a)の φ_s は地表面での加速度応答倍率を、(a)の φ_b は表層と基盤層との境界面での加速度応答倍率を、(b)は地表面の応答の入力に対する位相特性を、(c)は表層と基盤層の境界面でのせん断応力に対する応答倍率を示している。線形系の応答は地盤のせん断弾性係数を初期せん断弾性係数 μ_1 に等しいとして求めた。図から明らかなように、ここで用いた入力、降伏ひずみの場合には、1次モードが卓越する領域(ここで用いた地盤モデルでは0～6.6 Hzの領域に相当する)では弾塑性傾斜率 n が大きくなるにつれて地表面の応答倍率は減少する。応答倍率の曲線は共振点より低周波側では、線形のものから滑らかにずれるが、共振点より大きいところでは n に関係しないある特定の周波数で屈曲して線形のものとは一致する傾向のあることがわかる。なお共振振動数は n が0.8程度までは n の増加とともに減少するが、 n が0.8以上になると応答倍率の曲線はかなり平坦になり明確な共振点を定めにくくなり、 n が1.0に近づくと、共振振動数は応答倍率の曲線が屈曲する点の値に一致するようになる。また、地表の応答の入力に対する位相は n が大きくなるにつれて線形のものよりおくれることも明らかになる。以上は1次モードの卓越する領域での結果であるが、2次以上のモードが卓越する領域では、 n のいかにかわらず、周波数特性は線形系のものとまったく一致してしまう。これは高次のモードが卓越する場合には地盤内に発生するひずみ振幅の大きさが、1次モードの卓越する場合のものよりかなり小さくなり、降伏点 r_y を越えるようなひずみが地盤内に発生しなくなるためと考えられる。このことは地盤の震動問題を取り扱う場合、Bi-linearな応力～ひずみ関係に基づく履歴減衰は高周波数領域では、きかなくなる

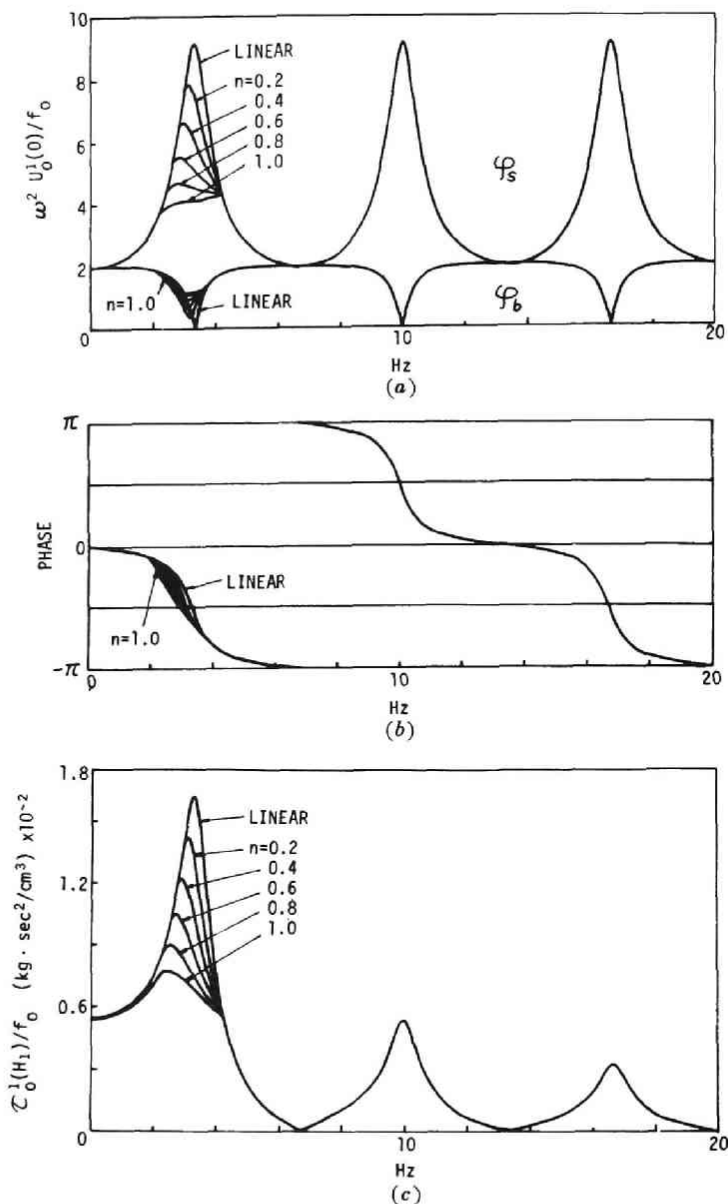


図 4.9 Bi-linear 要素から求まる等価弾性係数と等価減衰定数を用いたときの周波数伝達特性 ($f_0 = 50 \text{ cm/sec}^2$, n が変化する場合)

ことを意味しており、周波数の全領域にわたって一様に作用する粘性減衰が存在する場合の応答特性とはかなり異なったものになる。このことを明らかにするために、 ζ_v の値を 0, 2, 5, 10 % と変えた場合の各種応答特性を示したのが図 4.10 である。いずれの応答特性も減衰のきき方は高周波数領域で著しく、Bi-linear 履歴減衰のみを考えた図 4.9 のものとは高次モードにおける相異が著しい。なお、図 4.9 (c), 4.10 (c) のいずれの場合も、せん断応力の応答倍率

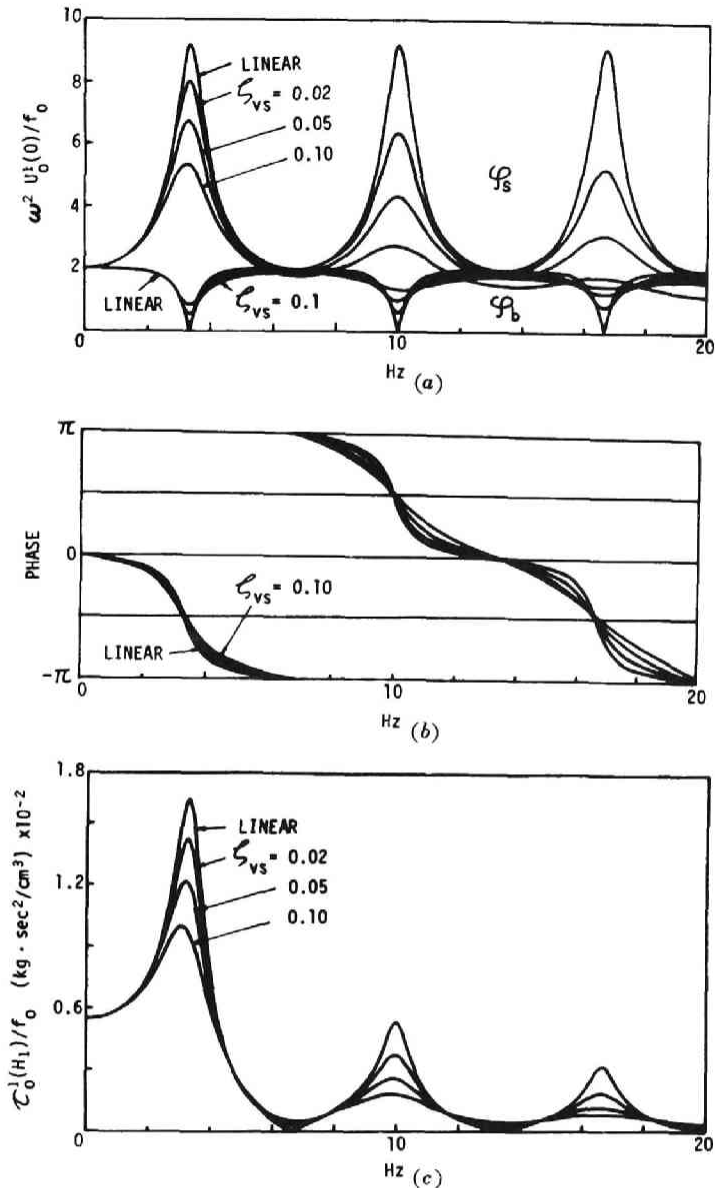


図 4.10 ひずみ速度非依存性の粘性減衰を考慮した場合の
周波数伝達特性

は、1次モードの卓越する領域で最大値を示し、振動モードが高くなるにしたがって、小さくなることが明らかである。

(2) 応力～ひずみ関係が Jennings 要素で与えられる場合

まず Jennings 要素のパラメータのうち、 τ を変化させた場合について考える。 $\alpha=0.1$ として、 τ を 3, 5, 11 と変化させる。計算に用いた μ_{eq} ならびに ζ_{eq} と τ_0/τ_y の関係は図 4.5 によって与え

られる。この関係は $r=1$ の場合は線形要素 ($\mu_{eq}=\mu_1, \zeta_{eq}=0$) になり, $r=\infty$ の時には完全弾塑性要素 (式(4.73), (4.74) で $n=1$) に一致する。すなわち r が大きくなると $r_0/r_y < 1$ の範囲で μ_{eq} は μ_1 に, ζ_{eq} は 0 に近づくことになる。図 4.11 は $f_0 = 50 \text{ cm/sec}^2$, $r_y = 5 \times 10^{-4}$ $\zeta = \zeta_{eq}$ とした場合の表層の周波数応答特性を示したものである。図中の (a), (b) は図 4.9 の場合の分類と同じになっている。1 次モードの卓越する周波数領域では, r が増大するにともない, 応答倍率は減少する。また共振点も低周波側へ移動しそれによってもって位相特性も変化するが, 高次モードの卓越する領域では, r が小さいほど応答倍率は小さく, r の増加によってもって線形のものに近づく傾向を示す。また共振点の移動は 1 次モードが卓越している領域ほど顕著ではない。このため位相特性は線形のものとの差がなくなってくることもわかる。これから, r が大きくなると, Jennings 要素から求まる履歴減衰は高周波数領域で小さくなることが判明する。

つぎにパラメータ α の変化によって表層の波動伝達特性がどのように変化するかをみる。計算に用いた μ_{eq} ならびに ζ_{eq} と r_0/r_y の関係は図 4.6 で与えられる。図 4.12 は $f_0 = 50 \text{ cm/sec}^2$, $r_y = 5 \times 10^{-4}$ $\zeta = \zeta_{eq}$ としたときの計算結果である。 α が大きくなるにつれて 1 次の共振点は

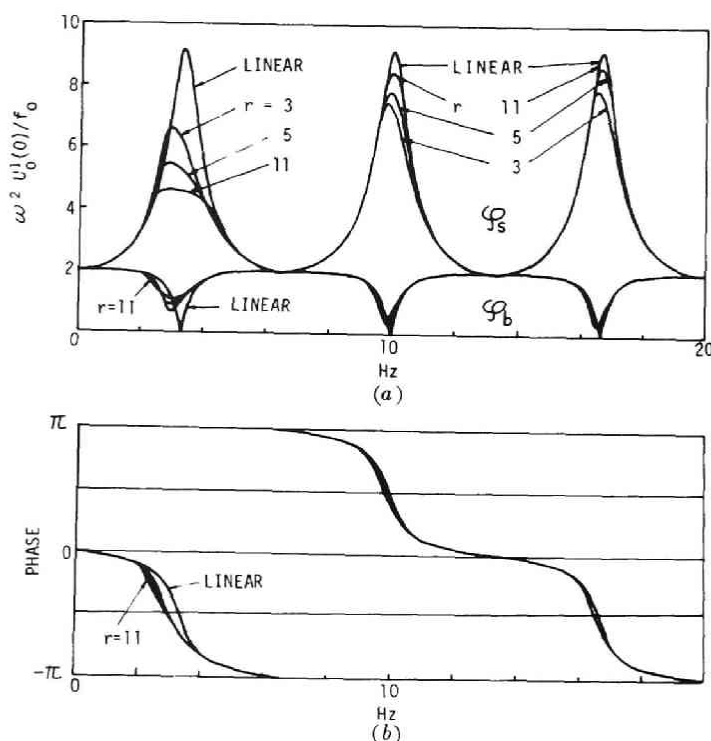


図 4.11 Jennings 要素から求まる等価弾性係数と等価減衰定数を用いたときの周波数伝達特性
($\alpha = 0.1$, $f_0 = 50 \text{ cm/sec}^2$, r が変化する場合)

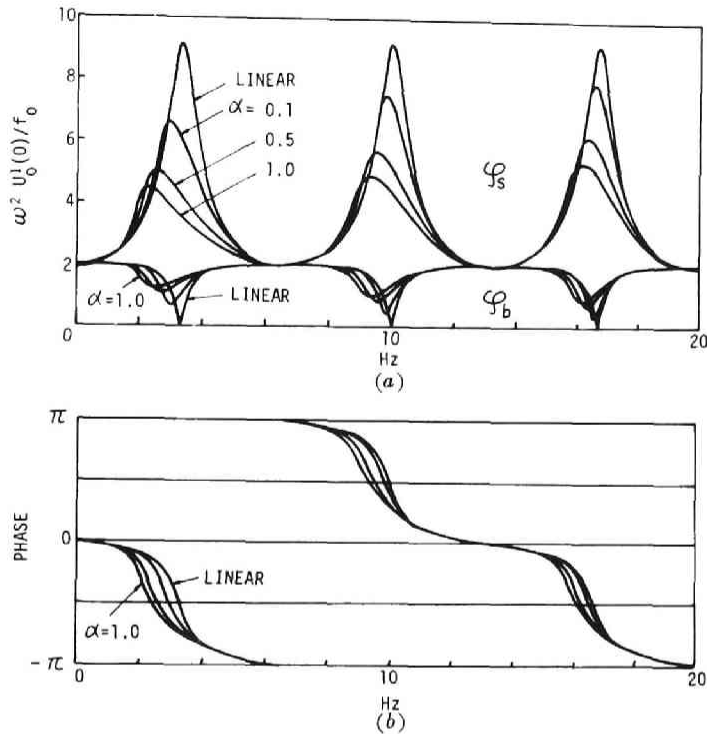


図 4.12 Jennings 要素から求まる等価弾性係数と等価減衰定数を用いたときの周波数伝達特性
($r=3$, $f_0=50 \text{ cm/sec}^2$, α が変化する場合)

低周波側へ移行し加速度応答倍率も減少することがわかる。なお α のわずかな変化によって共振点はかなり移動する。 r の変化による共振点の移動があまり大きくなかったことと比較すると、 α は要素の剛性変化に大きく関係していることが明らかになる。また高次のモードが卓越する周波数領域でも、 α の増加にともなって応答倍率は減少し共振点も低周波側へ移行し、 r を変化させた場合の特性とは異ったものになる。

(3) 応力～ひずみ関係が Hardin 形の場合

μ_{eq} ならびに ζ_{eq} は式 (4.83), (4.84) で与えられる。式中の α_μ ならびに α_ζ の変化が表層の応答特性におよぼす影響について調べる。以下の計算では $f_0=20 \text{ cm/sec}^2$, $\zeta=\zeta_{eq}$ としている。図 4.13 は $\alpha_\zeta=500$ とし α_μ を、500, 1000, 1500, 2000 と変化させた場合の地表層の振動特性を示したものである。 α_μ が大きくなるにしたがい共振点は低周波側へ移行し応答倍率も減少し位相もおくれていくことがわかる。減衰の非線形性を表わすパラメータ α_ζ が一定値を保つにもかかわらず α_μ が大きくなると応答倍率が減少するのは、地盤内に発生するひずみの分布が減衰特性に大きな影響を与えているからである。図 4.14 は非線形減衰を表わすパ

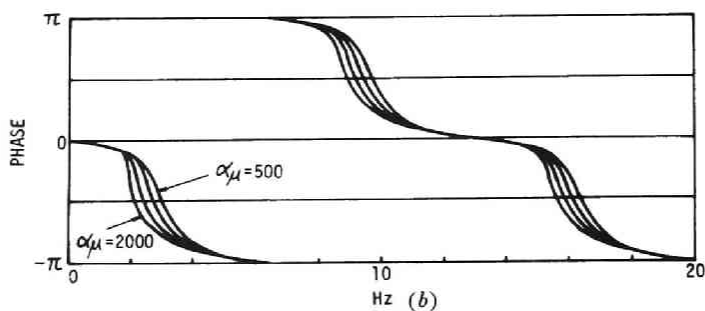
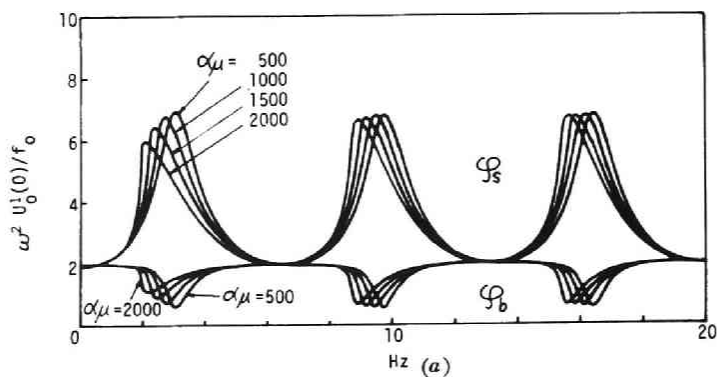


図 4.13 Hardin 形の等価弾性係数と等価減衰定数を用いたときの
周波数伝達特性 ($\alpha_\zeta = 500$, $f_0 = 20 \text{ cm/sec}^2$, α_μ が変化する場合)

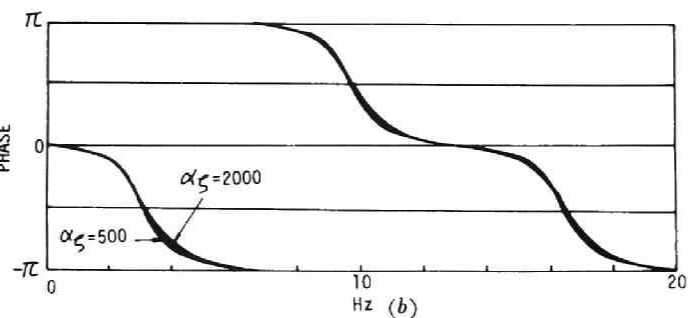
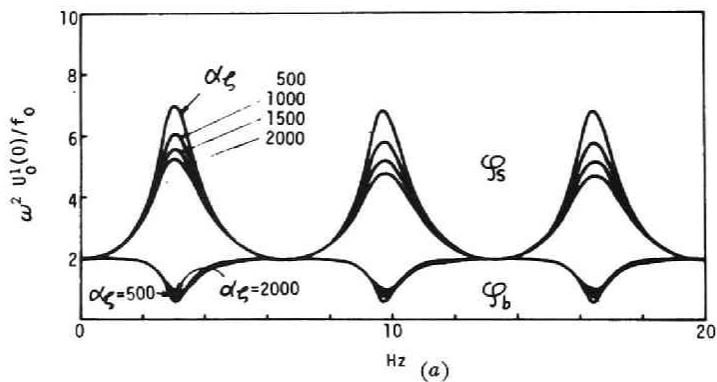


図 4.14 Hardin 形の等価弾性係数と等価減衰定数を用いた
ときの周波数伝達特性
($\alpha_\mu = 500$, $f_0 = 20 \text{ cm/sec}^2$, α_ζ が変化する場合)

ラメータ α_c が表層の応答特性におよぼす影響を示したものである。 $\alpha_\mu=500$ として、 α_c を 500, 1000, 1500, 2000 と変化させている。 α_c が大きくなるにつれて応答倍率は減少するが共振点の変動はほとんど起こらないことがわかる。

4・4・3 入力強度が周波数伝達特性におよぼす影響

以上は、応力～ひずみ関係が周波数特性におよぼす影響について調べたものであるが、ここでは、基盤層を上昇する波動の振幅特性が変化したときに表層の周波数特性がどのように変化するかについて考察を加える。図 4. 15 は Jennings 形の応力～ひずみ関係を用いた場合のもので $\tau=3$, $\alpha=0.1$, $\zeta=\zeta_{eq}$ とし、基盤層上端での上昇波の加速度振幅 f_0 を 50, 100, 150 cm/sec^2 と変化した場合のものである。図 (a) の φ_s より入力が大きくなるにつれて、地表面の加速度応答倍率は減少し共振点が低周波側へ移行することがわかる。図 (b) は入力が大きくなるにつれて位相がおくれることを示している。なお、応答倍率の減少ならびに共振点の低周波側への移行の度合は振動モードが高くなるにつれて小さくなる。

図 4. 16 は Hardin 形の応力～ひずみ関係を用いたときのもので、 $\alpha_\mu=500$, $\alpha_c=500$,

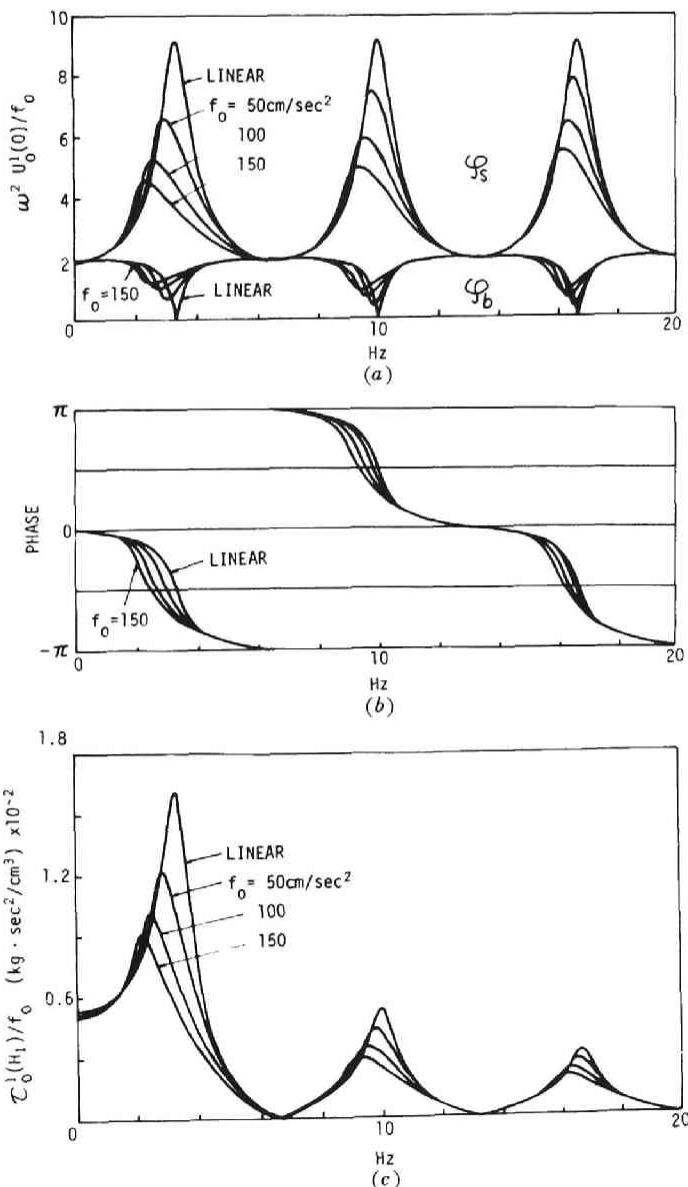


図 4. 15 入力の強度が表層の周波数特性におよぼす影響 (Jennings 形応力ひずみ関係使用 $\alpha=0.1$, $\tau=3$)

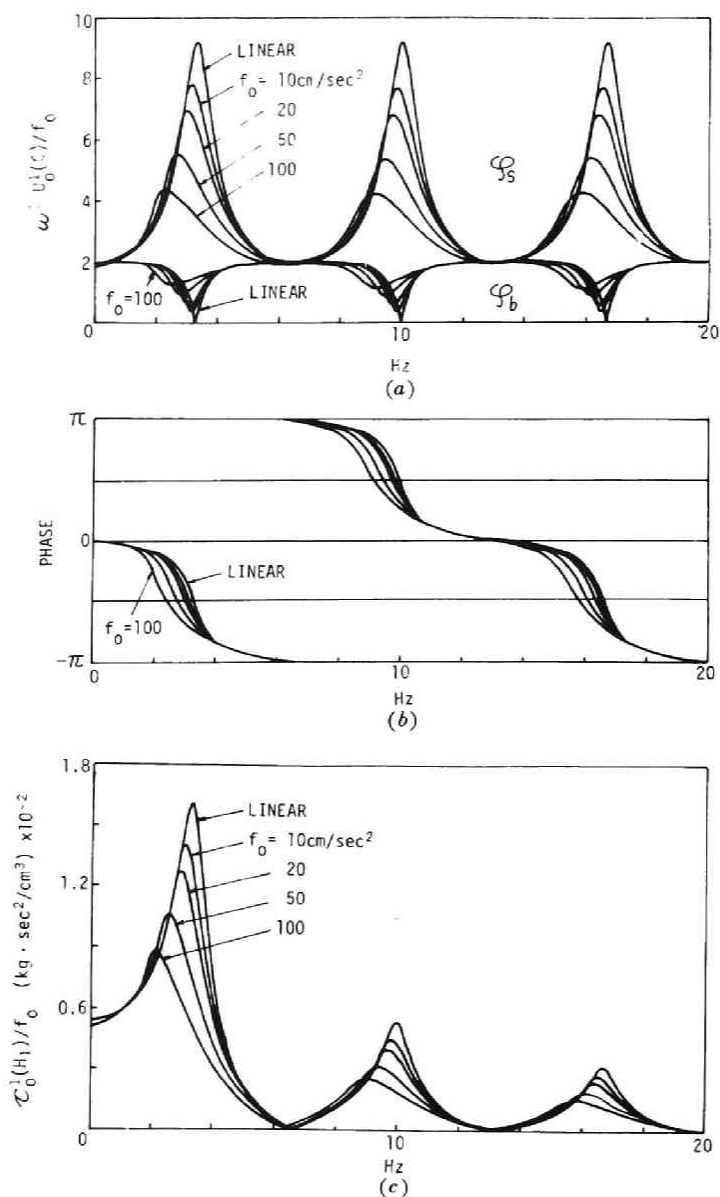


図 4.16 入力強度が表層の周波数特性におよぼす影響
(Hardin 形応力ひずみ関係使用 $\alpha_\mu = \alpha_\zeta = 500$)

$\zeta_m = 0.33$, $\zeta = \zeta_{eq}$ とし, f_0 を 10, 20, 50, 100 cm/sec² と変化させた場合のものである。この場合も地表面の加速度応答倍率は入力が大きくなるにつれて減少し, 共振点も低周波数側へ移行するが, 加速度応答倍率の減少の度合は振動モードが大きくなるとわずかではあるが増大するようである。これは Hardin 形の減衰のほうが, Jennings 形の減衰より高次の振動において良くきくことを表わしているものと考えられる。一方, 共振点の移行の度合は振動モード次数

にはあまり関係しないようである。なお図 4.15, 4.16 (c) から、基盤層と表層との境界面におけるせん断応力振幅の入力に対する倍率は、入力が大きくなるにつれて減少し、高次のモードではかなり小さくなることも判明する。

図 4.17, 4.18 は各々、応力～ひずみ関係として Jennings 形ならびに Hardin 形を使用したときの表層地盤内の震動分布を示したものである。これらは地表面の加速度応答倍率が最初に極大値を示すときの周波数にほぼ等しい点のものを示してある。(a) は加速度応答倍率を、(b) はひずみ振幅の入力に対する倍率を、(c) は応力振幅の入力に対する倍率を示してある。なお、図中に記入した周波数は、震動分布を図示した点の周波数である。図から、入力が大きくなるにつれて、加速度応答倍率は深い所で大きくなり浅い所では小さくなること、またひずみ振幅

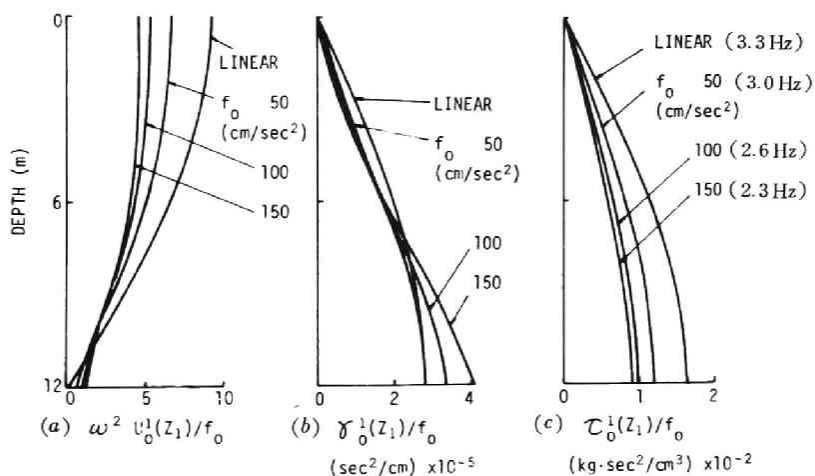


図 4.17 表層地盤内の震動分布 (Jennings 形応力～ひずみ関係使用 $\alpha = 0.1$, $r = 3$)

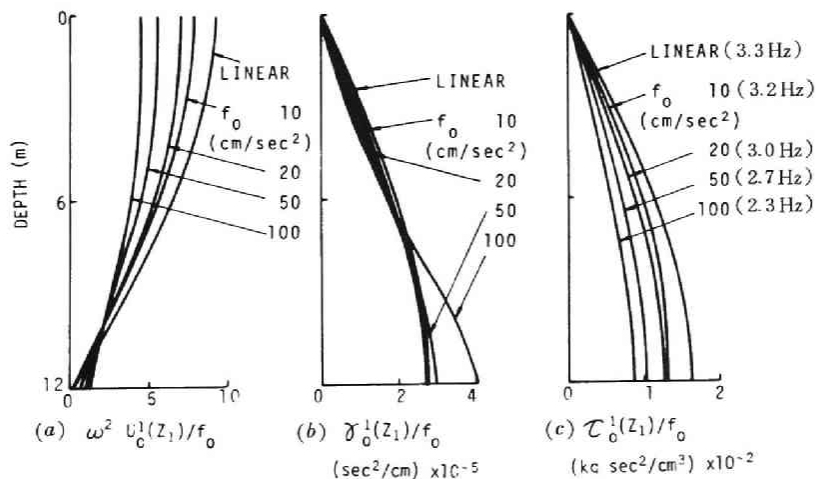


図 4.18 表層地盤内の震動分布 (Hardin 形応力～ひずみ関係使用 $\alpha_\mu = \alpha_\zeta = 500$)

の倍率は、表層と基盤層の境界面で最大値を取り、入力が大きくなるにつれて、深い所では大きくなり浅い所では逆に小さくなる傾向のあること、応力振幅の倍率は入力が大きくなるにつれて単調に減少することなどが判明する。なおここで取り扱った入力範囲では、ひずみの倍率は最大で線形の約1.3倍程度まで大きくなり、応力の倍率は線形の約0.6倍程度減少する。ひずみ振幅の分布形は入力が大きくなると線形のものに比べてかなり変化するが、応力振幅のそれは線形の場合とほぼ同じ形を保つ。

4・4・4 表層地盤の不均質性が周波数伝達特性におよぼす影響

これまで、表層地盤内の初期弾性係数、降伏ひずみ、非線形度パラメータなどが深さに関係しない一定値として解析を行なってきたが、これらの値は深さとともに変化するはずである。ここではHardin形の等価弾性定数と非線形度パラメータが深さの関数として与えられる場合に、入力の強度が表層の周波数伝達特性にどのような影響を与えるかについて考察を加える。式(4・83)、(4・84)では等価弾性係数と減衰定数の非線形度パラメータは異なるものとしたが、ここでは両者とも $\alpha_h = 1/\tau_f$ で与えられるものとする。この場合 α_h は次式で与えられる。

$$\alpha_h = \mu_1 / \tau_f \quad (4 \cdot 88)$$

ここに、 μ_1 は初期弾性係数であり、 τ_f は次式で求める。¹⁴⁾

$$\tau_f = \sqrt{\left(c' \cos \phi' + \frac{1+K_0}{2} \sigma' \sin \phi'\right)^2 - \left(\frac{1-K_0}{2} \sigma'\right)^2} \quad (4 \cdot 89)$$

ただし、 c' 、 ϕ' は有効応力で表現した場合の静的強度定数、 K_0 は静止土圧係数、 σ' は有効上載圧を表わしている。

表層地盤の初期弾性係数は微小ひずみのもとでのせん断波速度 V_s から $\mu_1 = \rho V_s^2$ で求める。 V_s の応力依存性は次式で与えられる。²¹⁾

$$V_s = A(\sigma' + \sigma'_0)^{1/4} \quad (4 \cdot 90)$$

ここに、 σ'_0 は地表面での有効上載圧である。

いま、 $c' = 0.05 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\phi' = 40^\circ$ 、 $\sigma'_0 = 0.112 \text{ kg/cm}^2$ とした場合の α_h ならびに V_s の分布形を求めたものが図4.19である。 V_s の深さ方向の平均値は160m/secになるように式(4・90)の A を決めた。また α_h 値の深さ方向の平均値は1490となった。

図4.19で与えられる分布形を用いて数値計算を行なうが、比較のために地盤が均質と考え

た場合のものも同時に示す。表 4.2 に数値計算を行なった入力強度と地盤条件を示した。なお以下の図中に記入した、C-L、C-20、V-L、V-20、V-50 の記号の意味も同時に示してある。図 4.20 は表層の周波数特性を示したものである。実線は地盤を不均質と考えた場合のものであり、破線は均質と考えた場合のものである。図(a)の φ_s の形状より不均質性を考慮したときの地表面の応答は均質な場合のものより常に大きくなること、いずれの場合も入力が大きくなるにつれて応答倍率は減少し共振周波数も減少することなどがわかる。なお、1 次モードが卓越する領域での V-50 曲線のピークと C-20 曲線のピークにおける加速度応答倍率

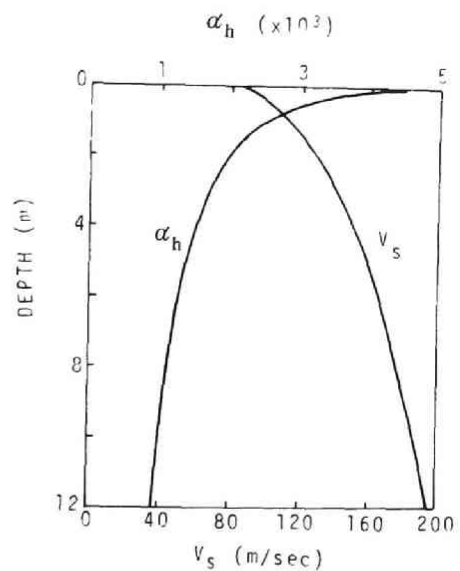


図 4.19 V_s, α_h の深さ方向分布

表 4.2 α 値とせん断波速度の分布形状

記 号	せん断波速度 V_s m/sec	α_h 値	解析法	入力強度 f_0 cm/sec ²
C-L	160 (深さ方向に一定)	—	線 形	—
C-20		1490 (深さ方向に一定)	非線形	20
V-L	深さ方向に変化 図 4.19 参照	—	線 形	—
V-20		深さ方向に変化 図 4.19 参照	非線形	20
V-50				50

の値はほぼ一致している。入力の大きさが異なるにもかかわらず、このような一致が得られるのは表層の加速度応答特性におよぼす不均質性の影響がかなり大きいことを示している。図の (b) は地表面の加速度応答の位相特性を示したものである。

図 4.21 は表層地盤内の震動分布を示したものである。分布形は 1 次モードの卓越する周波数領域での共振状態でのものである。図(a) から加速度応答倍率は不均質性を考慮すると、地表面近くでの増幅率が大きくなることが明らかになる。図(b) はせん断ひずみ振幅の入力に対する倍率を示したものである。不均質性を考慮した場合の分布形は均質な場合のものとはか

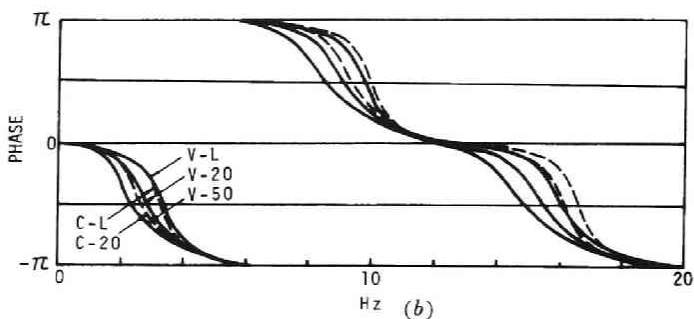
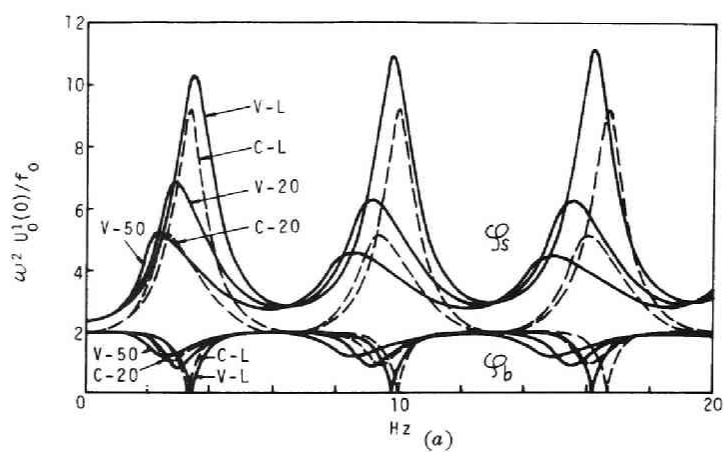


図 4.20 不均質性を考慮した場合の表層の周波数特性

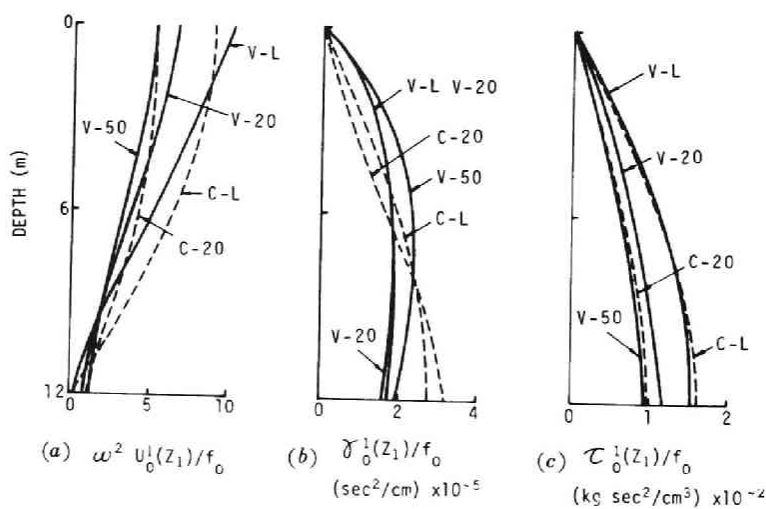


図 4.21 表層地盤内の震動分布

なり異った形になり、不均質性を考慮した場合の分布形には入力が大きくなっても変曲点が現われない。また図(c)よりせん断応力振幅の分布形は、地盤の物理的な特性がかなり変化しても影響を受けないことが明らかになる。

4・5 結 論

本章では、土の動的非線形性が表層地盤の震動特性にどのような影響を与えるかを調べるために、水平な成層地盤を対象とし、基盤層から SH 波が鉛直上方に入射したときの表層地盤の波動伝達特性に考察を加えたものである。計算に使用した土の動的な応力～ひずみ関係は、履歴特性を有する要素を等価線形化したものであり、Bi-linear 形、Jennings 形、Hardin 形の 3 種類である。得られた応力～ひずみ関係は弾性係数ならびに減衰定数がひずみ振幅の関数になるようなものである。こうした物性をもつ地盤の運動方程式の調和波動解を求めるために、地盤を数多くの薄層に分割し、周波数領域での定常調和波動解を重複反射理論によって求めておき、薄層の厚さを無限小にすることによって非線形調和波動の解析的表現形式を求めた。解の形式は閉じた形では求まらないので、繰り返し収束計算を行なわなければならない。表層と基盤層の 2 層から構成される地盤を対象とし、このような収束計算を行なった。本章で得られた結果を要約すると以下のようなものである。

- (1) 数値計算を行なうときの積分点の数は 1 つの層内で 25 点ほどあれば十分な精度の解が求まる。
- (2) Bi-linear 要素から求まる等価弾性係数ならびに等価減衰定数を用いて表層の周波数応答特性を調べたところ、加速度振幅一定の入力の場合、高次モードの卓越する周波数領域では Bi-linear 形の履歴減衰は小さくなることが明らかになった。高次モードの卓越している領域では地盤内に発生するひずみが降伏ひずみより大きくなることが少なくなるからである。したがって周波数の全領域にわたり、一様に作用する粘性減衰を考えた場合の応答とは非常に異なる。
- (3) Jennings 要素から求まる等価弾性係数ならびに等価減衰定数を用い、一定加速度入力の場合の表層の周波数特性を調べた。Jennings 要素のパラメータ α を 0.1 とし τ を変化させた場合には、高次モードの卓越する周波数領域では、 τ が大きくなるにしたがって減衰が小さくなる。また、 τ を一定とし α を変化させた場合には、振動モードに関係なく、 α が大きくなると減衰が大きくなり、 τ を変化させた場合とは異なることを示した。なお、地表面の加速度応答倍率の共振点は、 α のわずかな変化によって、大きく低周波側へ移動する。
- (4) Hardin 形の減衰定数の非線形度パラメータ α_c を増加させた場合、地表面の加速度応答倍率から求まる共振点はあまり変動せず、応答倍率が減少する。 α_c を一定に保ち α_μ を増加させ

ると共振点が低周波側へ移行するだけでなく応答倍率も減少する。

(5) 入力強度が増加すると地表面の加速度応答倍率は減少し共振点は低周波側へ移行する。また表層地盤内のひずみ振幅の分布形状は、入力強度の増大にともなってかなり変化するが、せん断応力振幅の分布形状は線形のものに相似である。

(6) 不均質性を考慮した場合の加速度応答倍率ならびにひずみ振幅の入力に対する倍率は、均質な場合のものに比べてかなり異なったものになるが、せん断応力振幅の倍率は両者の間であまり顕著な差を見出すことはできない。

以上が本章における結果であるが、表層地盤の震動特性は、地盤を構成する土の動的応力～ひずみ関係をどのように設定するかによって、大きく変化する。特に減衰特性の評価について詳しい考察がなされなければならないと考えられる。なお、ここでは基盤層から定常な単一の調和波動が入射する場合、表層を同じ周波数の強制波動が伝播するとして解を求めてきたが、解の安定性についてはほとんど考察を加えなかったし、高調波ならびに分数調波の伝播問題も今後の問題として残されている。また、地震波動は非定常非調和波動と考えられるが、このような波動に対して、ここで求めた解析手法を適用するためには、式(4・1)に現われる r_0 をどのように推定するかが問題となる。今後このような面についての研究もなされなければならない。

参 考 文 献

- 1) 後藤尚男, 佐藤忠信: 飽和した多孔質弾性体中を伝播する非線形波動について, 土木学会論文報告集, 第209号, pp. 37-50, 1973.
- 2) Toki K. and T. Sato : One-Dimensional Acceleration Waves in a Mixture of 2 Phases., Theoretical and Applied Mechanics Vol. 22, pp. 89-102, 1974.
- 3) Caughey T. K. : Forced Oscillations of a Semi-Infinite Rod Exhibiting Weak Bilinear Hysteresis., Journal of Applied Mechanics, pp. 644-648, 1960.
- 4) Seed H. B. and I. M. Idris : Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response Analysis., Report No. EERC 70-10, Col. of Eng., Univ. of Calif. Berkeley, 1970.
- 5) Hardin B. O. and V. P. Drnevich : Shear Modulus and Damping in Soils : Measurement and Parameter Effects., Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 98, SM6, pp. 603-624, 1972.
- 6) 柴田 徹, D. S. Soelarno : 繰返し载荷を受ける土の挙動, 第9回土質工学研究発表会講演集, pp. 351-354, 1974.

- 7) 柴田 徹, D. S. Soelarno: 砂の動的応力・ひずみ特性, 土木学会第 29 回年次学術講演概要集第 3 部, pp. 148-149, 1974.
- 8) 栗林栄一, 岩崎敏男, 龍岡文夫, 堀内俊一: 土の動的変形特性—共振法土質試験機による測定—, 土木研究所資料第 912 号, 1974.
- 9) Yoshizawa S., Tanaka T. and K. Kanai : Some Features of Strong Underground Earthquake Motions Computed from Observed Surface Records., Bulletin of the Earthquake Research Institute, Univ. of Tokyo, Vol. 46, pp. 667-686, 1968.
- 10) Idriss I. M. and H. B. Seed : An Analysis of Ground Motions During the 1957 San Francisco Earthquake., Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 58, No. 6, pp. 2013-2032, 1968.
- 11) Seed H. B. and I. M. Idriss : Influence of Soil Condition on Ground Motions During Earthquakes., Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 95, SM1, pp. 99-137, 1969.
- 12) 岡本舜三, 伯野元彦: 地盤の非線型振動に関する研究, 第 1 回日本地震工学シンポジウム論文集, pp. 45-50, 1962.
- 13) 藤野陽三, 伯野元彦: 強震特性に関する一つのシミュレーション, 土木学会第 29 回年次学術講演会講演概要集第 1 部, pp. 547-548, 1974.
- 14) Hardin B. O. and V. P. Drnevich : Shear Modulus and Damping in Soils : Design Equation and Curves., Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 98, SM7, pp. 667-692, 1972.
- 15) 土岐憲三, 佐藤忠信: 非線形挙動をする表層地盤内における地震時応力, 京都大学防災研究所年報 17 号 B, pp. 403-415, 1974.
- 16) 堀 正幸: 不均質弾性地盤の震動特性に関する近似解法について, 第 8 回土質工学研究発表会講演集, pp. 629-632, 1973.
- 17) Jacobsen L. S. : Damping in Composite Structures., Proc. 2nd World Conf. on Earthquake Eng., Vol. II, pp. 1029-1044, 1960.
- 18) 後藤廉平, 平井西夫, 花井哲也: レオロジーとその応用, 共立出版, 1962.
- 19) Jennings P. C. : Periodic Response of a General Yielding Structure., Jour. EM Div., Proc. ASCE, Vol. 54, EM2, pp. 131-166, 1964.
- 20) Hardin B. O. : The Nature of Damping in Sands., Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 90, pp. 63-67, 1965.
- 21) 柴田 徹, 佐藤忠信, 酒井和広: 砂質土中を伝播する S 波速度の応力依存性, 第 9 回土質工学研究発表会講演集, pp. 407-410, 1974.

第5章 砂質地盤中のせん断波速度

5・1 概 説

地盤中を伝播する波動は、地盤を構成している土の動的性質に大きく影響される。土の動的性質は、土粒子の物理的性質、含水比、間げき比、吸着水といったような内的要因とそこに作用する力や外から加えられる熱などといった外的要因に支配されると考えられる。土を工学的に取り扱う場合、これらの要因の内支配的なものとして何を選ぶかが重要な問題になる。最近工学的に有為である土の動的応力～ひずみ関係についての研究^{1,2,3)}が行なわれ、かなり具体的な表現が示されている。これらの多くは、ひずみが非常に小さな時($<10^{-5}$)の弾性係数(μ_0)を基準として、弾性係数がひずみの増大にともなって減少するという考え方をしている。この基準となる弾性係数に関しては、共振柱法によって Ottawa 砂のせん断弾性係数の測定を行ない、これが平均有効主応力と間げき比の関数になるとした Hardin & Richart の研究⁴⁾この関係式が正規圧密された粘土に対しても適用できるとした Hardin & Black の研究⁵⁾土を多孔質な媒質と考え、弾性係数と間げき比の関係を誘導した柴田、土岐、寺田の研究⁶⁾また、軸応力と側圧の比が2以下であればせん断弾性係数は八面体せん断応力の影響を受けないことを示した Hardin & Black の研究^{5,7)}粘性土のせん断弾性係数におよぼす応力履歴の影響をカオリンならびにベントナイトの2種類について調べ、2次圧縮効果についても考察を加えた Hamphries 等の研究⁸⁾粘性土の2次圧縮がせん断弾性係数におよぼす影響を調べ、2次圧縮領域における間げき比の変化だけでは説明のつかない弾性係数の変動があることを見出した Afifi 等の研究^{9,10)}また現場測定と室内実験の結果を比較し、室内実験の値から現場の値を推定するためには拘束圧の選定と2次圧縮効果の推定が大きな要因になることを示した Stokoe & Richart の研究^{11,12)}などがあるが、土の動的応力～ひずみ関係をさらに一般的なものとするためには、基準となるせん断弾性係数の応力依存性について詳しく調べておく必要があると考えられる。このような観点から、ここでは砂質土を対象として、定ひずみ速度の伸張ならびに圧縮せん断試験の各せん断過程でせん断波速度 V_s を測定し、 V_s におよぼす応力ならびにひずみのレベルの影響について調べ、併せて応力履歴の効果について実験的な考察を加える。 V_s に関して得られた諸特性は $\mu = \rho V_s^2$ によってそのまません断弾性係数の特性に読み代えることができる。

土中を伝播する弾性波の速度を実験室で測定する方法には、上述した円柱または円筒供試体を強制振動させ、その共振振動数から伝播速度を求める共振柱法、供試体の自由振動から求め

る方法,¹³⁾ 衝撃管を用いて供試体に衝撃波を作用させ、供試体中を伝わる応力波の波面の時間的おくれから伝播速度を求める方法^{14,15)} などがあるが、ここでは超音波のパルスが供試体中を伝わるのに要する時間から伝播速度を求めることにする。超音波パルス法は従来からおもに岩石などの中を伝わる波動の速度などを測定するのに用いられていたが、¹⁶⁾ 柴田らの研究⁶⁾ によって砂のような粒状体の集合体に対しても十分適用可能なことが確かめられている。

5・2 実験装置と試料

実験装置は三軸試験装置と超音波発生装置からなっており写真 5.1 にその概略を示した。(a) は三軸セル内に送受振動子と供試体が組立てられた状態を、(b) はその詳細を、(c) は超音波伝播速度測定器を示している。超音波の発振振動数は 30 KHz で横波が発生できるものである。送受振動子はアクリライト製の型枠の中にほぼ全体を埋め込むことにより防水してある。送振動子が三軸セルのペDESTAL に固定され、受振動子がキャップとなっている。送振動子により供試体の一端に超音波パルスの衝撃を与え他端においた受振動子によってこのパルスを受信し、発振周波数と掃引周波数を同期させることにより、試料内を透過するのに要する時間をオシロスコープ上の透過波の静止像から読み取ることができるようになっている。

本実験に用いた試料は豊浦標準砂であり、比重は 2.64、均等係数は 1.28 である。供試体は円柱でありその両端は振動子に接し側面は 0.3 mm 厚のゴムスリーブで包まれている。供試体は 3 層にわけて突き固めることによって供試体の間げき比を調節するようにした。表 5.1 に等方圧縮終了後の間げき比の値が示してある。こうして得られた供試体の寸法は直径約 5 cm、高さ約 5.6 cm のものである。側圧は恒圧装置により水压でかけ、試験はすべて排水条件下で行ない排水量は 0.01 cc 読みのビュー

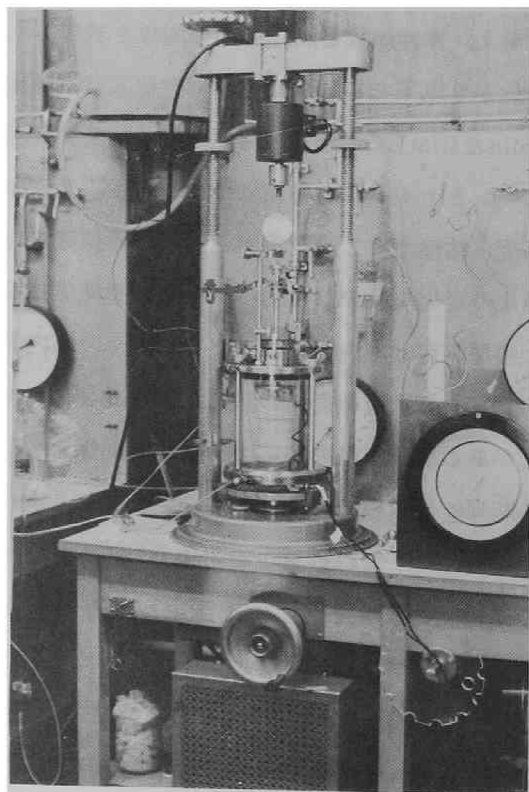
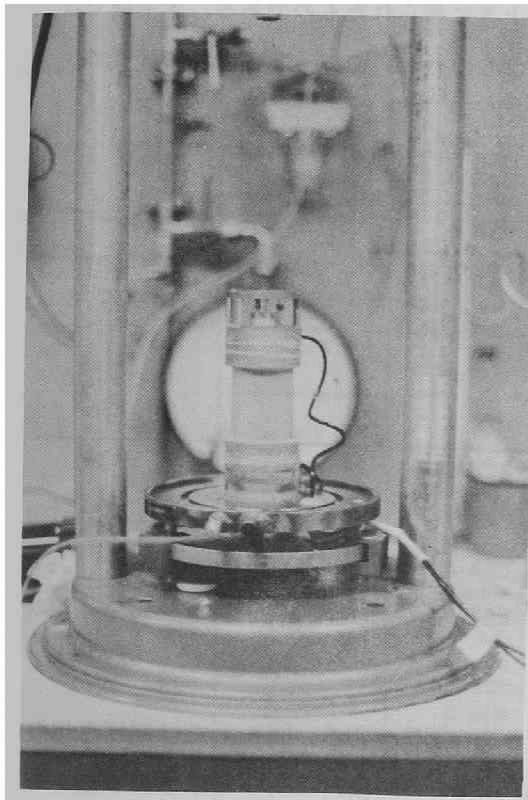
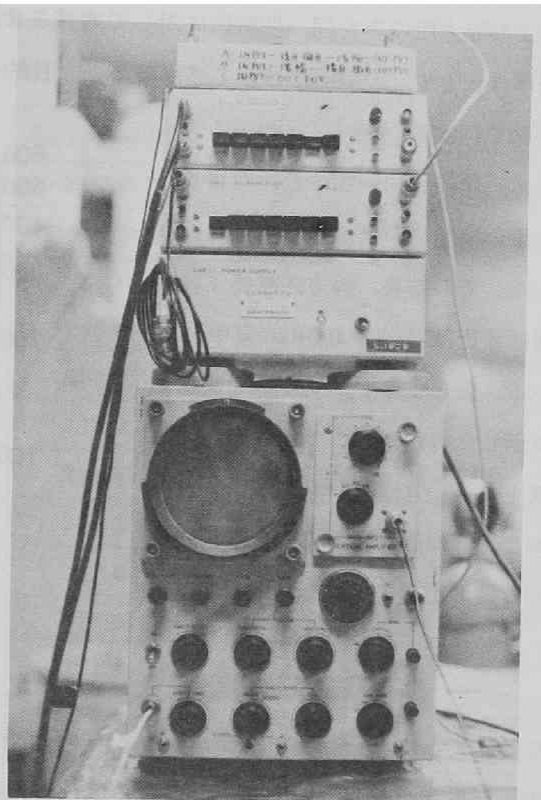


写真 5.1 (a)



(b)



(c)

写真 5.1 実験装置

レットで測定した。せん断に先立って等方圧縮を 30 分行ないその時の体積変化を測定し初期間げき比を決定した。その後 0.0376mm/min の載荷速度でせん断試験を行ないながら、せん断の各段階で超音波の伝播速度を測定した。なお測定した項目は以下のようなものである。(i)等方圧縮終了時における波速、(ii)側圧一定ひずみ制御伸張試験中の波速、(iii)側圧一定ひずみ制御圧縮試験中の波速、(iv)平均主応力一定の伸張試験中の波速、(v)側圧一定ひずみ制御圧縮繰り返し試験中の波速。

5・3 砂質土中を伝播する S 波速度の応力依存性

5・3・1. 等方圧縮時におけるせん断波速度

等方圧縮時における等方圧 σ_0 とせん断波速度 V_{s0} の関係については従来から数多く報告されている。表 5.1 はここで行なった実験から得られた V_{s0} , μ_0 , e , σ_0 の値を示した。これらの値は、次節以後に示す異方向応力、すなわちせん断応力、を加えるに先立って行なった等方圧縮の際、

および等方圧のみを同一供試体に対して増減させたときに得られたものである。本実験では、間げき比と V_{s0} の関係について述べることを目的とはしていないので、間げき比の変動の V_{s0} に及ぼす影響をできるだけ少なくするため、比較的同一間げき比の得られやすい密詰め供試体で実験を行った。その結果、等方圧縮終了後の間げき比は 0.57～0.58 に集中している。表 5.1 の V_{s0} - σ_0 関係を両対数で示したのが図 5.1 である。両対数紙上で V_{s0} - σ_0 関係は直線となっており、その傾きは 0.25 であり従来から数多く報告されている。

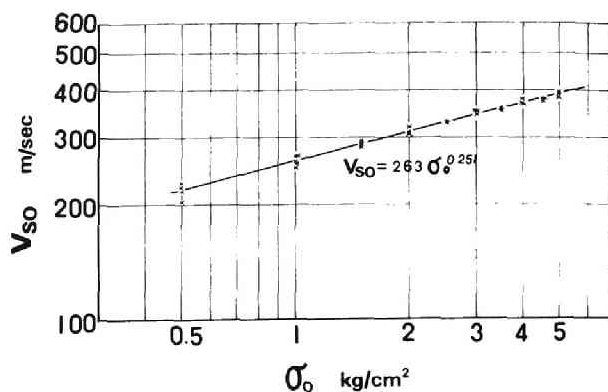


図 5.1 V_{s0} - σ_0 関係

$$V_{s0} = f(e) \sigma_0^{1/4}, \quad (5.1)$$

なる結果と良く一致している。ここに $f(e)$ は間げき比の関数である。図 5.1 では間げき比の変動が小さいことから $f(e) = 263$ なる関係を得る。以後この関係式によって示される線を等方圧縮ラインと名付ける。

砂は完全に飽和していると考え、供試体の見かけの比重 ρ を次式によって求める。

$$\rho = \rho_s \left(1 - \frac{e}{1+e}\right) + \rho_f \frac{e}{1+e} \quad (5.2)$$

ここに、 ρ_s は土粒子の実質部分の比重、 ρ_f は水の比重である。さらに $\mu_0 = \rho V_{s0}^2$ からせん断弾性係数 μ_0 と σ_0 の関係を示したのが図 5.2 である。比較のために、間げき比の平均的な値とし 0.575 を取り $\rho = 1.70$ として μ_0 と σ_0 の関係式を求めると

$$\mu_0 = 1198 \sigma_0^{1/2} \quad (5.3)$$

が得られ、この式を図示すると

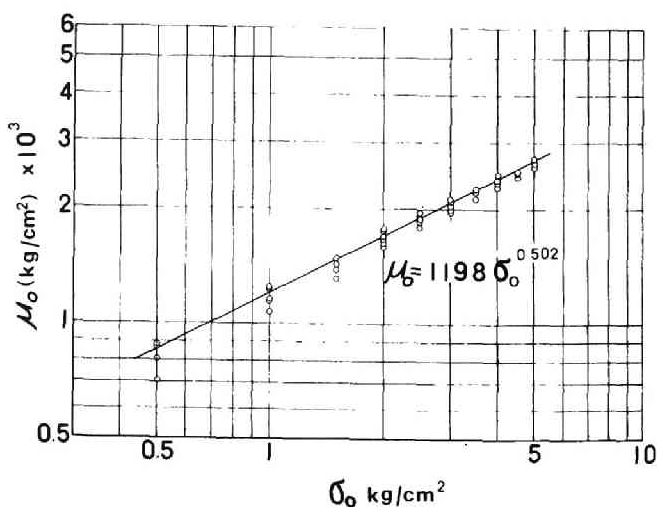


図 5.2 μ_0 - σ_0 関係

表 5.1 σ_0 , e , V_{s0} , μ_0 一覽表

σ_0 (kg/cm ²)	e	V_{s0} (m/sec)	μ_0 (kg/cm ²)
1.0	0.569	257.0	1,150
	0.571	258.0	1,157
	0.575	268.0	1,244
1.5	0.571	285.0	1,412
	0.594	282.5	1,357
2.0	0.572	310.0	1,669
	0.576	318.4	1,754
	0.579	314.3	1,704
	0.580	307.0	1,624
	0.580	313.6	1,695
	0.582	307.1	1,622
	0.659	274.4	1,198
	0.712	254.1	970
2.5	0.569	330.0	1,897
	0.579	327.9	1,855
	0.582	328.0	1,850
3.0	0.573	349.0	2,133
	0.577	341.0	2,010
	0.577	350.8	2,127
	0.578	352.0	2,139
	0.580	348.0	2,087
	0.580	350.8	2,121
	0.595	335.0	1,906
	0.607	337.0	1,906
3.5	0.577	352.0	2,141
4.0	0.570	370.0	2,382
	0.579	379.2	2,480

図 5.2 における実線になる。ここに、 μ_0, σ_0 の単位は kg/cm^2 である。

5・3・2 伸張状態におけるせん断波速度

飽和した砂供試体に対して、ひずみ制御伸張試験を $1 \sim 4 \text{ kg}/\text{cm}^2$ の側圧 σ_r について行なった。図 5.3 に各側圧における主応力差 ($\sigma_1 - \sigma_3$) と軸ひずみ ϵ_a の関係を示した。図 5.4 は ϵ_a とその時のせん断波速度 V_s を側圧をパラメータとして示したものである。この図から ϵ_a の小さいところでの V_s の減少の割合は、側圧が小さいほど大きいことがわかる。 ϵ_a が 10^{-3} になったときの V_{s0} からの減少量を図から求めると表 5.2 のようになっている。なお、 ϵ_a が 10^{-4} 以下であれば V_s は V_{s0} にほぼ等しいものと考えられる。一方、軸ひずみが 10^{-3} 程度以上になると V_s の変化は急激になるから、普通の三軸試験などから求められる応力～ひずみ関係の初期部分から初期弾性係数を求める場合には、竹中等¹⁷⁾が指摘しているように、ひずみが 10^{-3} より小さい領域での測定精度をかなり向上しなければならない。

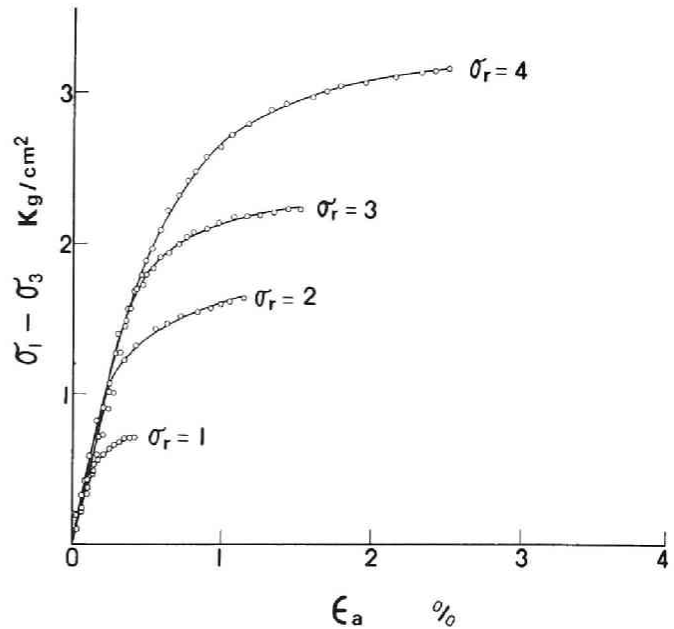


図 5.3 主応力差～軸ひずみ関係 (伸張)

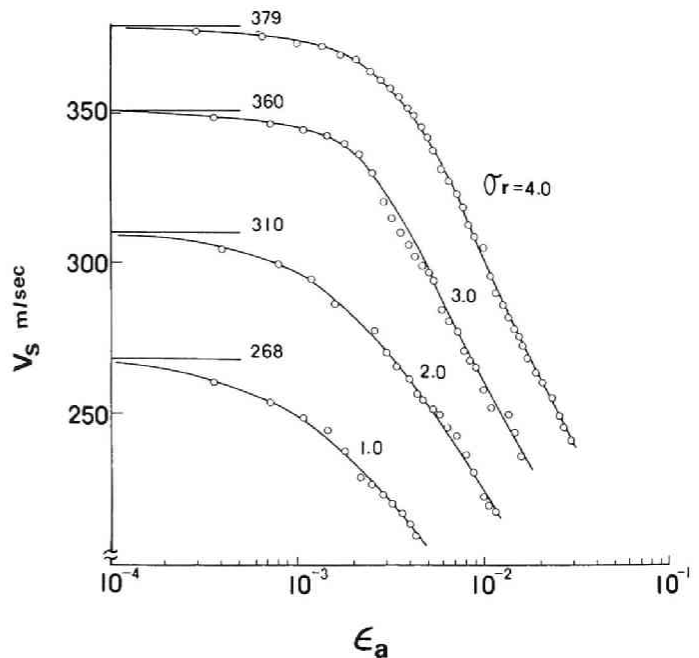


図 5.4 $V_s - \epsilon_a$ 関係 (伸張)

図 5.5 は図 5.4 のデータを平均主応力 σ_m と V_s の関係に整理しなおしたものである。間げき比の変化も同時に示してあるが、その変動は等方圧縮時において 0.007、伸張試験中において

表 5.2 $\epsilon_a = 10^{-3}$
における V_{s0} か
らの V_s の減少量

σ_r (kg/cm ²)	$(V_{s0} - V_s) / V_{s0}$ (%)
4.0	0.8
3.0	1.2
2.0	2.4
1.0	5.6

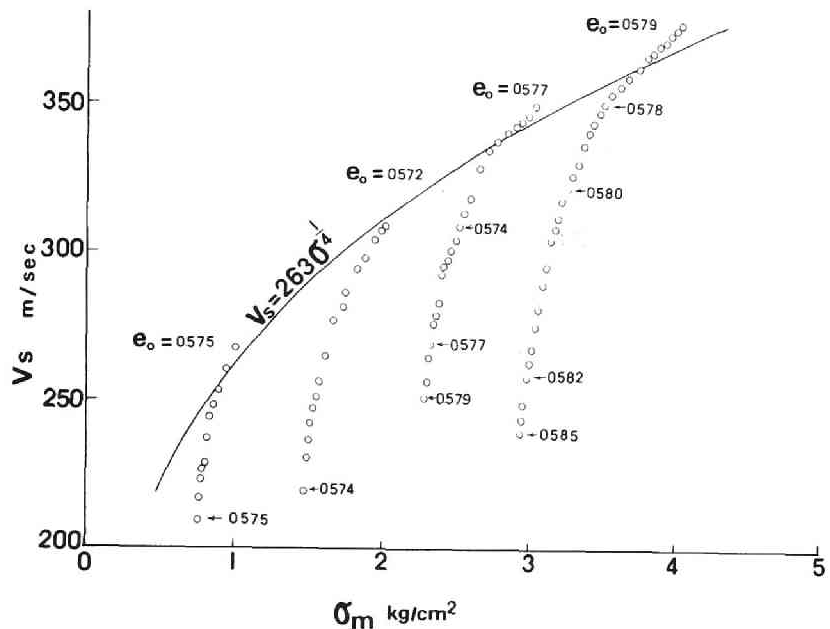


図 5.5 $V_s - \sigma_m$ 関係 (伸張)

最大 0.006 である。Hardin & Richart の実験式を用いて、この程度の間げき比の変動が V_s の値におよぼす影響を求めると、 V_s に約 0.6 % 程度の誤差を生じるがこれは実験中の測定誤差の範囲にはいる程度のものであり無視できるものである。図中には図 5.1 で求めた等方圧縮ラインが実線で示されている。この曲線はせん断を全く受けていない状態における $V_s - \sigma_m$ 関係を表わしており、多少の誤差はあったとしても、図 5.5 の側圧をパラメータとしたプロットはこの曲線に始点を発すると考えてよい。図によれば、 V_s は σ_m の減少とともに初めは比較的ゆるやかに、やがて急激に減少することがわかる。これは、Hardin 等が述べている、 V_s は σ_m と e のみの関数であり他の応力不変量には依存しないという結果⁵⁾とは異っている。彼らの実験値が等方圧縮状態を基点とし、繰り返し载荷をも含めて圧縮側が大部分であり、側圧 σ_r と軸圧 σ_a の比が 2 以下の場合のみを取り扱っていることを考慮すると、 V_s は σ_m のみによって規定されるとはいいがたく、他の応力不変量の影響も受けるものと考えられる。

図 5.6 は $\sigma_m = 2 \text{ kg/cm}^2$ での一定値を保ったまま伸張試験を行なったときの各せん断過程での V_s と ϵ_a の関係を示したものである。ひずみ速度を一定に保ちながら側圧を手動操作することに

より σ_m 一定条件を保つようにした。図中には側圧一定試験での $V_s \sim \epsilon_a$ 関係も同時に示してある。 σ_m 一定試験下でも V_s は ϵ_a の増加とともに減少し V_s が σ_m のみの関数としては表現できないことを裏づけている。側圧一定試験の場合の方が V_s の減少は大きい、これは σ_m がせん断中に減少するためである。

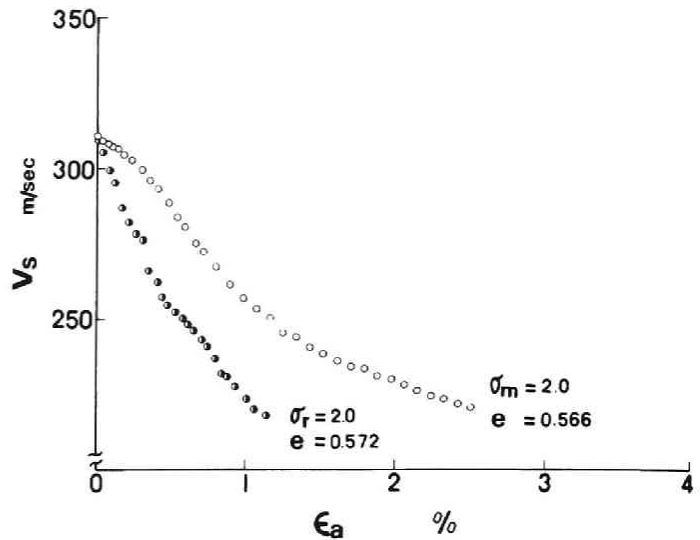


図 5.6 $V_s - \epsilon_a$ 関係 (σ_m 一定, σ_r 一定)

5・3・3 圧縮状態におけるせん断波速度

図 5.7 は側圧 σ_r を 1~3 kg/cm² に対してひずみ制御式の圧縮試験を行なったときの主応力差 ($\sigma_1 - \sigma_3$) と軸ひずみ ϵ_a の関係を示している。図 5.8 はその時の $V_s \sim \log \epsilon_a$ 関係を示している。伸張試験の場合と同様に ϵ_a が 10^{-4} 以下であれば V_s は V_{s0} にほぼ等しいものと考えられる。またこの場合は伸張試験のときとは異なり、ある程度軸ひずみが大きくなるとふたたび V_s の変動が小さくなる。これは側圧の大小にかかわらず見られる傾向である。図 5.9 は $V_s - \sigma_m$ の関係を示している。この図

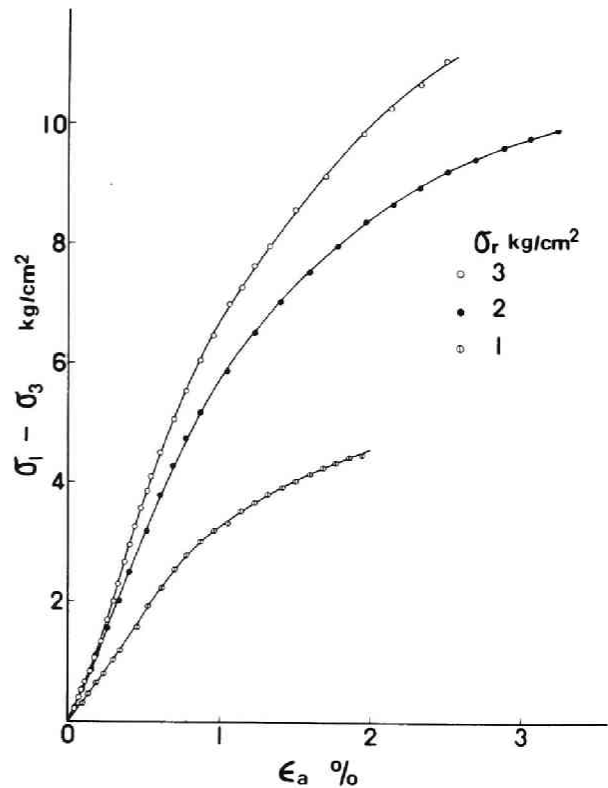


図 5.7 主応力差～軸ひずみ関係 (圧縮)

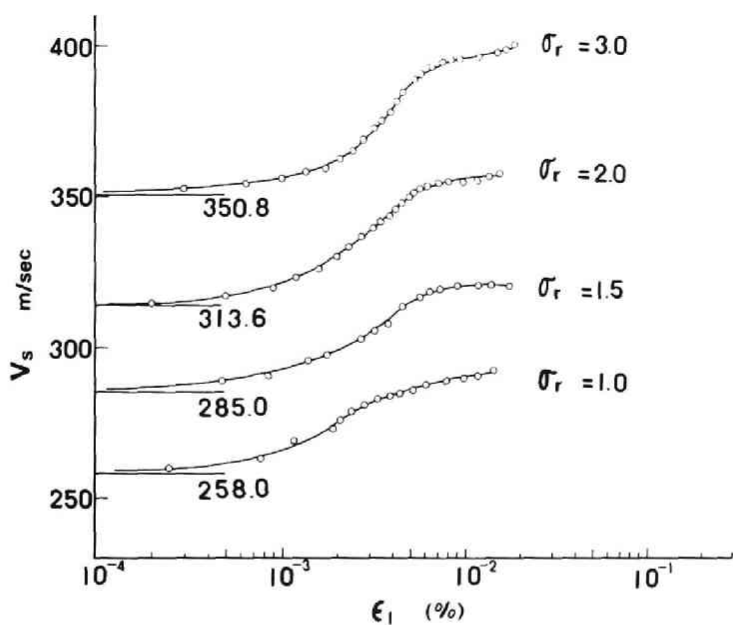


図 5.8 $V_s - \epsilon_l$ 関係 (圧縮)

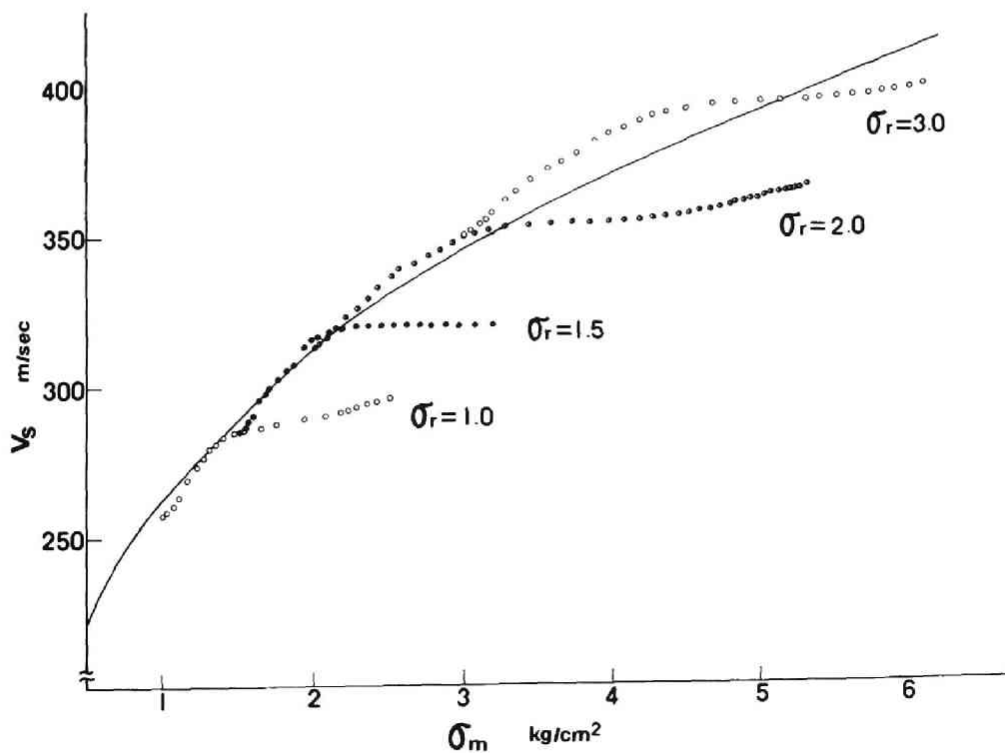


図 5.9 $V_s - \sigma_m$ 関係 (圧縮)

においても伸張試験におけると同様、各側圧における $V_s - \sigma_m$ 関係は等方圧縮ライン上に始点があると考えてよい。図から明らかなように V_s は σ_m の増加にともない等方圧縮ラインに沿ってその値は大きくなり、せん断が進行するにつれて等方圧縮ラインからそれる。また初期の等方圧縮ラインに沿った部分は側圧が大きくなると、等方圧縮ラインより上側へずれることも明らかになる。なお $V_s - \sigma_m$ 関係が等方圧縮ラインからそれる点は、 $V_s - \log \epsilon_a$ 関係において V_s の変動が小さくなる点とほぼ一致している。この点は主応力比 σ_3/σ_1 が $0.4 \sim 0.5$ の範囲にあり、この応力比前後で体積ひずみが圧縮から膨張に変わる。このことを考慮すれば、 $V_s - \sigma_m$ 関係の以上のような特性は以下のように説明できるものと考えられる。

粒子構造が一定に保たれている段階では粒状体の剛性変化は σ_m のみに関係する。一方粒子構造に変化を与えるのはせん断応力 τ であると考ええる。等方圧縮された状態からせん断を受けると、ある応力レベルまでは等方圧縮による粒子構造の剛性により、せん断力が増加しても粒子間にすべりや回転があまり発生せず粒子構造が一定に保たれるため、 σ_m の増加による粒子構造の剛性の増大が卓越する。一方、ある応力レベルを越えると、粒子間のすべりや回転などが顕著になり、粒子構造が変化するため、 V_s は σ_m が増大するにもかかわらず変化しなくなる。

なお、南雲^{18,19,20)}は接触面において固結された粒状媒質の弾性係数について理論的考察を加え、粒子間のずれ変形を考慮した場合の弾性波速度は、ずれ変化のない場合のものより大きくなることを示した。このことは、側圧が大きくなるとせん断の初期の部分で V_s の値が等方圧縮ラインから求まるものより大きくなることの定性的な説明を与えるものであると考えられる。

図 5.10 は間げき比によって $V_s - \sigma_m$ 関係がどのように変わるかを示したものである。側圧は

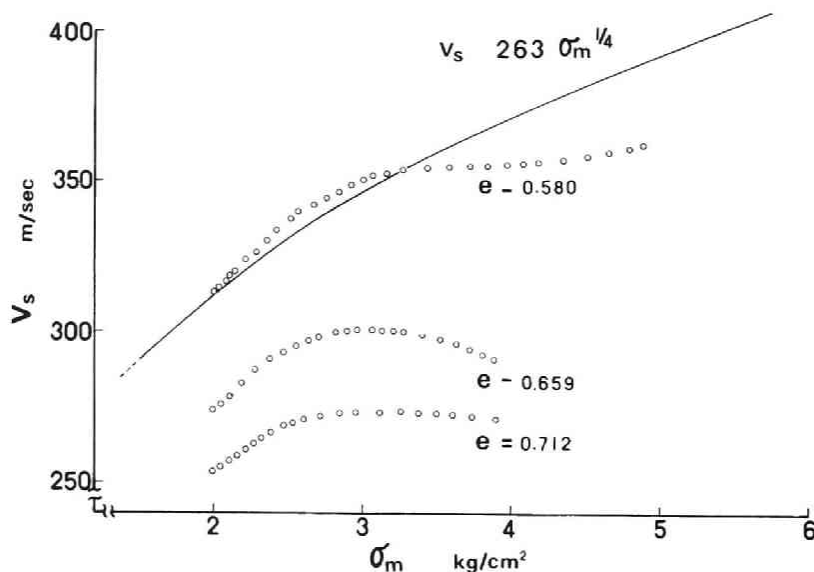


図 5.10 $V_s - \sigma_m$ 関係（間げき比が変化する場合）

すべて 2 kg/cm^2 であり、初期間げき比は 0.580, 0.659, 0.712 の場合について示してある。図中の実線は等方圧縮ラインである。間げき比が大きくなるほど、 V_s は小さくなりかつ V_s の増加が σ_m のみの増加によって説明できる初期の部分が少なくなることがわかる。

5・3・4 繰り返し载荷時におけるせん断波速度

側圧を 1 および 2 kg/cm^2 の状態で片振り繰り返し圧縮試験を行ない、各せん断段階でせん断波速度を測定した。図 5.11 は側圧が 1 kg/cm^2 での主応力差と軸ひずみの関係が示してある。繰り返しのピークひずみは 2 % である。1 回目の载荷と除荷で約 1 % の残留ひずみ残り 2 回目以後の繰り返しでは残留ひずみはわずかである。図 5.12 は側圧 2 kg/cm^2 のときの $\sigma_1/\sigma_3 \sim \epsilon_a$ 関係である。この場合、1 回目の载荷時のピーク軸ひずみは 0.54 %、2 回目では 1.55 % であり、段階的に軸ひずみを上げて繰り返すものである。1 回目の繰り返しひずみレベルは小さいため、除荷後の残留ひずみはほとんどない。2 回目の繰り返しでは除荷後の残留ひずみは約 0.4 % である。

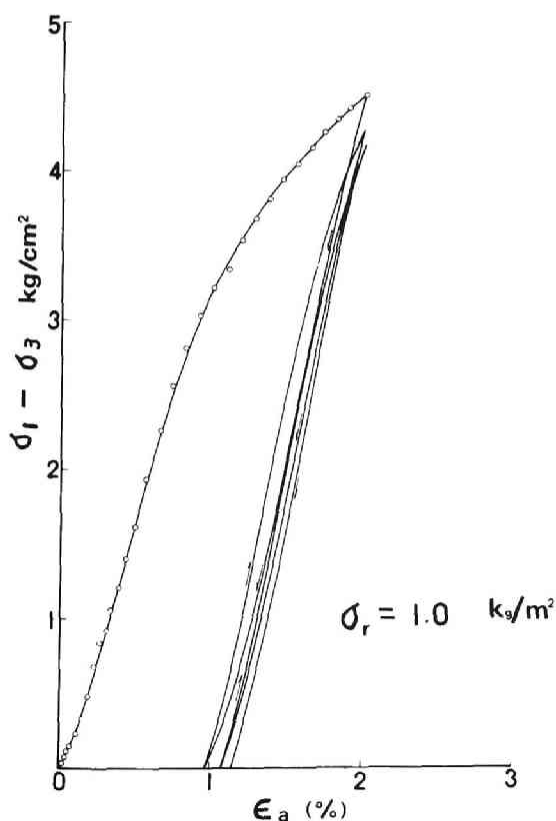


図 5.11 主応力差～軸ひずみ関係

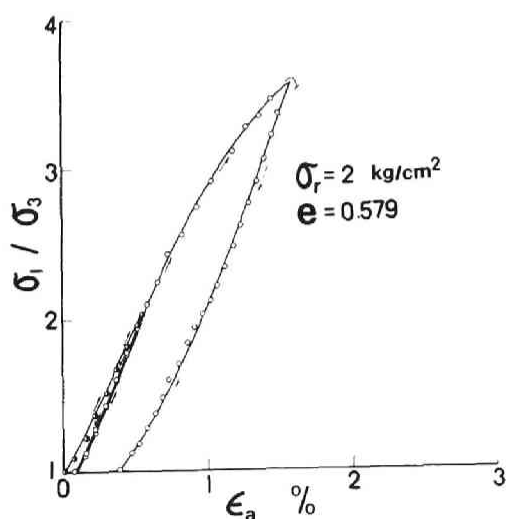


図 5.12 $\sigma_1/\sigma_3 - \epsilon_a$ 関係

図 5.13 は以上のせん断試験の各段階で測定した V_s と σ_m の関係を示したものである。図中の○印は1回目の载荷段階でのデータを示している。側圧 1 および 2 kg/cm^2 のいずれの場合も V_s - σ_m 関係が等方圧縮ラインからそれた状態で繰り返し載除荷を行なうと、 V_s - σ_m 関係は繰り返し

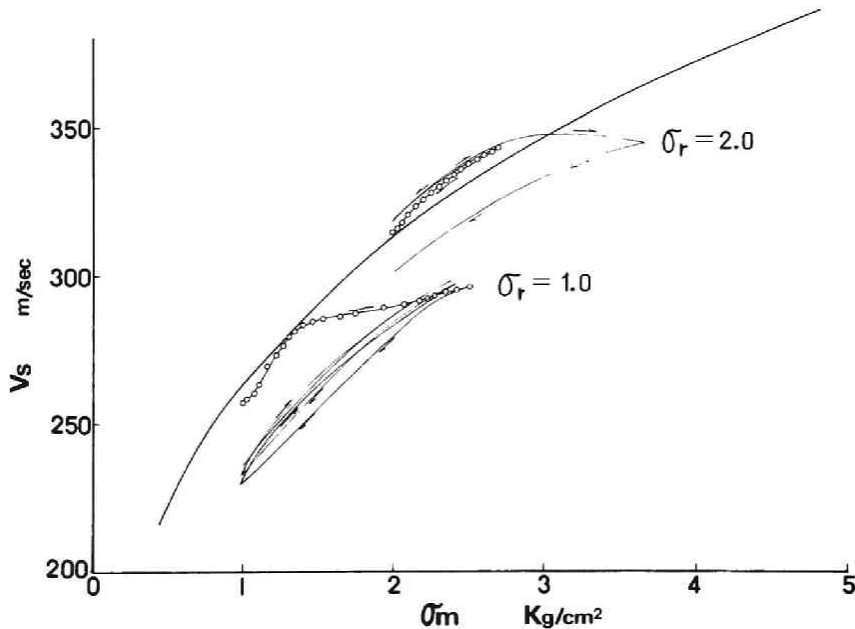


図 5.13 V_s - σ_m 関係

回数の増加とともに V_s が若干大きくなる傾向はあるが、ほぼ等方圧縮ラインに平行で等方圧縮ラインで与えられる V_s より小さな値になることがわかる。一方、側圧 2 kg/cm^2 の1回目の除荷は V_s - σ_m 関係が等方圧縮ラインからそれ始めようとする限界点で行なわれているが、 V_s は载荷時の V_s - σ_m 曲線に沿って変化し除荷によって初期の V_s を回復していることがわかる。このように、加えられたせん断応力の大きさにより V_s - σ_m 関係が異なるのは、あるレベルより大きなせん断履歴を受けると粒子構造が変化し履歴が記憶されるため、これが V_s の減少という表現になって観測されるためであると考えられる。図 5.14 に Hardin 等が行なった実験の応力範囲を斜線で示した。図中の鉛直の実線は著者が行なった繰り返し载荷の応力径路である。5・3・3で述べたことと合わせて主応力比 σ_1/σ_3 が2程度より小さければ V_s は σ_m のみによって規定され Hardin 等の結論が成立しているが、2より大きくなると σ_m のみでは表現できず別の応力不変量も考慮しなければならないと言えよう。

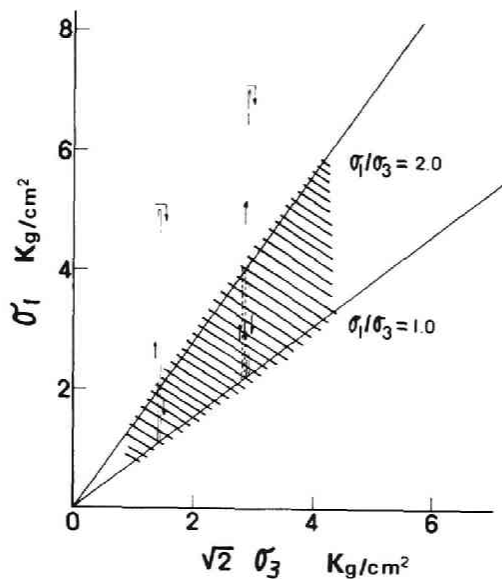


図 5.14 応力径路図

5・4 考 察

以上述べてきたように V_s は間げき比と平均有効主応力のみでは表現できないことが明らかになった。ここでは、土粒子が最も活発に滑動すると考えられる潜在すべり面上の垂直応力 σ_N とせん断応力 τ の比 τ/σ_N をあらたなパラメータとして選ぶことにより²¹⁾、伸張ならびに圧縮試験結果から得られる V_s の値について考察を加える。このすべり面は次式で与えられる。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \tan \phi_{\text{mob}}, \quad \sin \phi_{\text{mob}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \quad (5.4)$$

この2式より次式の関係うる。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} - \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}} \right) \quad (5.5)$$

つぎに、せん断中におけるせん断波速度 V_s を等方圧縮時のせん断波速度 V_{s0} によって正規化する。すなわち速度のパラメータとして次式を用いる。

$$v_{\text{noi}} = \frac{|V_{s0} - V_s|}{V_{s0}} \quad (5.6)$$

図 5.15 は $v_{\text{noi}} - \tau/\sigma_N$ の関係を伸張、圧縮の両者の場合について同時に示したものである。

側圧の大きさに関係なく、この関係は、
 圧縮・伸張の両者とも途中で折れ曲が
 る直線によって表わされるものと考え
 られる。この直線の折れ曲がり点は、
 圧縮・伸張とも一致し、この点の
 τ/σ_N の値を a とすれば $0 \leq \tau/\sigma_N \leq a$
 の間の直線の傾きは圧縮・伸張とも一
 致しており、次式で実験値を近似でき
 ると考えられる。

$$\frac{|V_{s0} - V_s|}{V_{s0}} = c \cdot \frac{\tau}{\sigma_N} \quad (5.7)$$

ここに、 a ならびに c は間げき比の関
 数であり、実験データの平均的な間げ
 き比を0.575とすれば、このとき $a \doteq$
 0.4、 $c \doteq 0.275$ となる。図5.16に c の間げき比による変
 動を示した。

一方、 $\tau/\sigma_N > a$ の場合には圧縮側では直線の傾きは小さ
 くなり、伸張側では直線の傾きが大きくなることがわかる。
 これは τ/σ_N が a 付近を境として、砂の挙動が変化すること
 を表わしている。 σ_1/σ_3 が2の場合には τ/σ_N が0.36にな
 るので、 $\tau/\sigma_N = 0.4$ は図5.9で $V_s - \sigma_m$ 関係が等方圧縮ライ
 ンよりそれ始める点に相当し、この応力比以下であれば、図
 5.13から明らかなようにほぼ弾性的な挙動をするから、
 τ/σ_N が a より大きくなると粒状体の構造変化が卓越することになる。なお間げき比が大きくな
 れば、 a の値は小さな値を取るようになる。

図5.9において、主応力比 σ_3/σ_1 が0.4～0.5以下であれば、 $V_s - \sigma_m$ 関係は等方圧縮ライ
 ンで近似してもあまり誤差がないことを明らかにした。この事実を用い地盤内のせん断波速
 度の推定式を提案する。地盤は圧縮状態にあり静止土圧係数 K_0 は0.3～0.5の範囲に入っ
 ていることを考えれば、地盤における V_s の推定には式(5.1)の σ_0 に地盤内に発生している
 σ_m を代入すればよいことになる。すなわち次式によって地盤の V_s が推定できる。

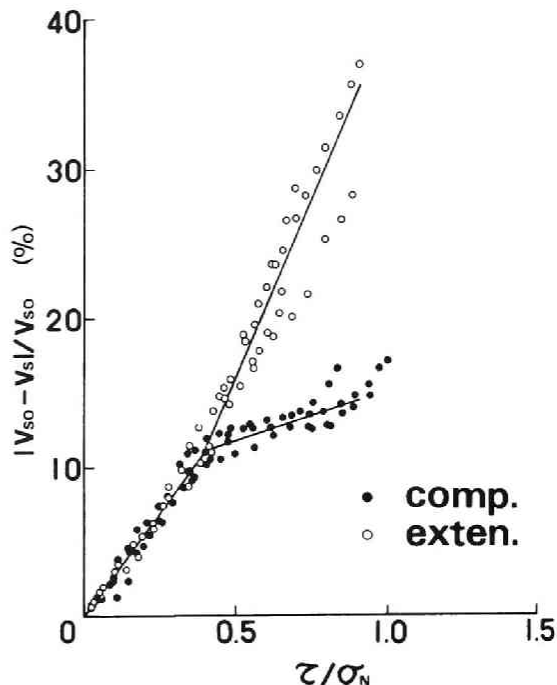


図 5.15 $|V_{s0} - V_s| / V_{s0} - \tau / \sigma_N$ 関係

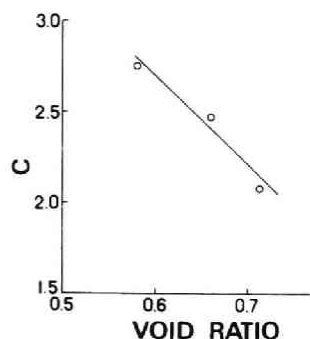


図 5.16 式(5.7)の係数 c と
間げき比の関係

$$V_s = f(e) \left(\frac{1 + 2K_0}{3} \right)^{1/4} \sigma_1^{1/4} \quad (5 \cdot 8)$$

ここに、 σ_1 は有効上載圧である。この場合有効拘束圧 $K_0 \sigma_1$ が 3 kg/cm^2 以上になると、式 (5・8) による V_s の推定値は実際の値より 10 % 程度小さい値になる。

5・5 結 論

本章では、超音波パルス法を用いて飽和砂中を伝播するせん断波速度を実験的に求め、そのひずみ依存性、応力依存性を調べた、本研究において得られた結果を要約すると次のようである。

- (1) 等方圧縮時のせん断波速度 V_{s0} は有効拘束圧 σ_0 の $1/4$ 乗に比例する。
- (2) 異方向応力を受ける飽和砂中のせん断波速度は強い応力依存性を示し、主応力比 σ_1/σ_3 が 2 より大きくなると、平均有効主応力の変化だけでは説明できない波速の変化を生ずる。
- (3) 圧縮状態で σ_1/σ_3 が 2 より小さい応力状態のもとでは、平均有効主応力と間げき比が明らかになれば V_s の値の推定が可能である。
- (4) V_s におよぼす繰り返し載荷の効果を調べると、 σ_1/σ_3 が 2 以下で繰り返し載荷を行なった場合には、ほぼ弾性的な挙動を示し、除荷によって最初の V_s の値を回復するが、 σ_1/σ_3 が 2 より大きな所での繰り返し載荷では除荷によって最初の V_s が回復されない。
- (5) 土粒子が最も活発に滑動すると考えられる潜在すべり面上の垂直応力 σ_N とせん断応力 τ の比 τ/σ_N を用いると τ/σ_N がある値より小さければ、等方圧縮状態からの V_s のずれは、伸張・圧縮の両方にわたって統一的に表現できる。

参 考 文 献

- 1) Hardin B. O. and V. P. Drnevich : Shear Modulus and Damping in Soils. : Design Equation and Curves., Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 98, SM7, pp. 667-692, 1972.
- 2) 柴田 徹, D. S. Soelarno : 繰り返し載荷を受ける土の挙動, 第 9 回土質工学研究発表会講演集, pp. 351-354, 1974.
- 3) 柴田 徹, D. S. Soelarno : 砂の動的応力・ひずみ特性, 土木学会第 29 回年次学術講演概要集第 3 部, pp. 148-149, 1974.
- 4) Hardin B. O. and F. E. Richart : Elastic Wave Velocities in Granular Soils., Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 89, SM1, pp. 33-65, 1963.

- 5) Hardin B. O. and W. L. Black : Vibration Modulus of Normally consolidated Clay.,
Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 94, SM2, pp. 353-369, 1968.
- 6) 柴田 徹, 土岐憲三, 寺田邦雄: 砂質土の弾性波速度に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第 13 号 B, pp. 593~609, 1970.
- 7) Hardin B. O. and W. L. Black : Sand Stiffness Under Various Triaxial Stresses.,
Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 92, SM2, pp. 27-42, 1966.
- 8) Humphries W. K. and E. W. Harrey : Stress History Effects on Dynamic Modulus of Clay., Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 94, SM3, pp. 371-389, 1968.
- 9) Afifi S. S. and R. D. Woods : Long-term Pressure Effects on Shear Modulus of Soils.,
Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 97, SM10, pp. 1445-1460, 1971.
- 10) Afifi S. S. and F. E. Richart : Stress-history Effects on Shear Modulus of Soils., Soil
and Foundations, Vol. 13, No. 1, pp. 77-95, 1973.
- 11) Stokoe K. H. and R. D. Woods : In Situ Shear Wave Velocity by Cross-hole Method.,
Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 98, SM5, pp. 443-460, 1972.
- 12) Stokoe K. H. and F. E. Richart : In-situ and Laboratory Shear Wave Velocities., Proc.
8th. Int. Cont. on SMFE, Moscow, 1/62, 1973.
- 13) 赤井浩一, 山内勇喜男: 衝撃的荷重に対する飽和粘土の応答特性, 土木学会論文報告
集, 第 149 号, pp. 36-45, 1968.
- 14) Akai K., Hori M., Ando N. and T. Shimogami : Shock Tube Study on Stress Wave
Propagation in Confined Soils., Proc. JSCE, No. 200, pp. 127-141, 1972.
- 15) Akai K., Hori M. and T. Shimogami : Study on Stress Wave Propagation through
Saturated Cohesive Soils by means of Triaxial Shock Tube., Proc. JSCE, No. 228,
pp. 99-108, 1974.
- 16) 八木則夫, 石井義明: 土または岩石における超音波伝播速度とその力学特性, 京都大学
防災研究所年報, 第 12 号 B, pp. 77-88, 1969.
- 17) 竹中準之介, 西垣好彦: 地盤の力学性状とその振動, 第 3 回日本地震工学シンポジウム,
pp. 293-299, 1970.
- 18) 南雲昭三郎: 粒状媒質の弾性 (I), 物理探鉱, 第 15 巻, 2 号, pp. 65-71, 1962.
- 19) 南雲昭三郎: 粒状媒質の弾性 (II), 物理探鉱, 第 15 巻, 4 号, pp. 194-197, 1962.
- 20) 南雲昭三郎: 粒状媒質の弾性 (III)-静的応答と変形係数の応力依存性, 物理探鉱, 第 16
巻, 3 号, pp. 149-155, 1963.

- 21) 松岡 元：せん断時の土の応力～ひずみ関係について，京都大学防災研究所年報，第15
B，pp. 499-511, 1972.

第6章 表層地盤内の震動分布

6・1 概 説

最近の急激な都市構造形態の変化に対処するため、大都市圏では地中構造物の建造されることが多くなってきた。これら構造物の耐震設計を行なう場合、地盤内に発生する応力ならびにひずみの大きさが、その支配的要因になる場合も数多く見受けられる。強震時におけるこれらの値が直接地盤内で観測された例はほとんどないため、地表面で得られた加速度記録などから、解析的な手法によりその量を推定しなければならない。地表面で観測される地震波の特性は、震源における発震機構、地震波の伝播経路やその媒体の特性などに依存するが、この十数年の間に、強震時における地表面での加速度記録が同一地域内で多数観測されるようになり、地表面近くの地盤構成が地表面の運動に大きな影響を与えることが明らかにされてきた。¹⁾特に固有周期の比較的短い土木構造物への入力地震波を対象とする場合には、強震記録の中でも実体波が卓越する短周期成分のところが問題になるから、地表面下100m程度までの地層構造が重要な要素となる。

このような観点から、強震観測地点での速度検層が詳しくなされるようになり、^{2~5)}これをもとにして地盤内の震動分布の推定を行なったり、⁶⁾表層地盤の影響を取り除いた地震波の特性を解析したり⁷⁾することができるようになってきたわけであるが、地盤内の震動特性を調べるための解析手法としては、もっぱら重複反射理論が用いられてきた。しかし、これは地盤を構成している土を均質な線形弾性体と仮定した場合にのみ成立する解析手法であって、土の動的な力学特性を十分考慮した方法とはいえない。

土の力学特性を支配する要因は数多くあるが、特にその動的特性は発生するひずみの大きさによって異ってくる。^{8~12)}表層を構成する土は基盤層に比較して軟弱であるから、表層地盤内で地震波は大きく増幅され、土の応力～ひずみ関係が線形と仮定できる領域内だけの解析では十分に地盤の震動特性を調べることはできない場合が生じると考えられる。したがって土の動的非線形性を考慮に入れた波動伝播理論の開発がまたれるわけであるが、非線形双曲形偏微分方程式の特性がよくわからないこともあって具体的な解の表現形式が与えられていないため、数値解析によって解の特性を調べているのが現状である。これらには、階差法を用いた岡本、伯野らの研究¹³⁾や特性曲線法を用いた土岐、佐藤の研究¹⁴⁾などがある。

ここでは、波動理論の立場に立ち、特性曲線法を用いることにより、これまでに得られてい

る地表面での強震記録をもとにして、地盤を構成している土の非線形性が、地盤内に発生する応力ならびにひずみにどのような影響を与えるかについての検討を行なう。

6・2 解析手法

いま、図 6.1 のような水平構造の成層地盤を考え、地震波動は Z 軸に平行に鉛直下方から入射する SH 波とすれば、系を支配する運動方程式は次式で与えられる。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial Z} \quad (6.1)$$

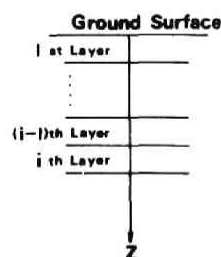


図 6.1 地盤層

ここに、 ρ は密度、 u は地盤内変位、 τ は地盤内に発生するせん断応力である。いま次式のような変数を定義する。

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \epsilon = \frac{\partial u}{\partial Z} \quad (6.2)$$

この場合、 ξ は運動速度、 ϵ はせん断ひずみに相当している。せん断応力とせん断ひずみの関係は次式で与えられるものとする。

$$\tau = \mu(\epsilon) \cdot \epsilon \quad (6.3)$$

ここに、 μ はせん断弾性係数である。式(6.2)、(6.3)を式(6.1)に代入すれば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial \xi}{\partial t} - \left(\frac{d\mu}{d\epsilon} \epsilon + \mu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial Z} &= 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial Z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

式(6.4)は ξ, ϵ に関する 1 階偏微分方程式であり、その特性曲線の勾配 $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ は次式で与えられる。

$$\lambda_\alpha = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(\frac{d\mu}{d\epsilon} \epsilon + \mu \right)}, \quad \lambda_\beta = -\lambda_\alpha \quad (6.5)$$

この特性曲線に沿う式(6.4)の関数方程式は次式となる。

$$dZ - \lambda_\alpha dt = 0$$

$$\left. \begin{aligned} d\xi - \lambda_\alpha d\varepsilon &= 0 \\ dZ - \lambda_\beta dt &= 0 \\ d\xi - \lambda_\beta d\varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

いま、2つの特性曲線 α , β の交点 P での t_P , Z_P , ξ_P , ε_P をそれぞれの特性曲線上にある近傍の点 Q , R での値から求める。この場合式 (6.6) の差分展開式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Z_P - Z_Q - (\lambda_\alpha)_Q (t_P - t_Q) &= 0 \\ \xi_P - \xi_Q - (\lambda_\alpha)_Q (\varepsilon_P - \varepsilon_Q) &= 0 \\ Z_P - Z_R - (\lambda_\beta)_R (t_P - t_R) &= 0 \\ \xi_P - \xi_R - (\lambda_\beta)_R (\varepsilon_P - \varepsilon_R) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

地震波動の深さ方向の変化を知るためには、任意の深さでの時間履歴がわからなければならない。空間位置を Z_j に固定し、時刻 t_i での ξ , ε の値を求めるには図 6.2 のように (Z_j, t_j) を含む三角形 PQR を取り出し、この三角形上で (Z, t, ε) あるいは (Z, t, ξ) の形成する平面を考え、この平面の方程式に、 (Z_j, t_j) を代入し $\xi|_{Z=Z_j, t=t_j}$, $\varepsilon|_{Z=Z_j, t=t_j}$ を求める。

なお、境界条件は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{(i) 地表面} &: \varepsilon = 0, \xi = f(t) \\ \text{(ii) 地盤層の境界} &: \tau_i^T = \tau_{i-1}^D, \xi_i^T = \xi_{i-1}^D \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

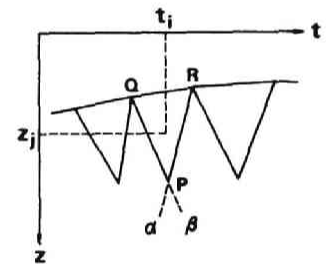


図 6.2 特性曲線場

ここに、 $f(t)$ は地表面での運動速度、 τ_i^T と ξ_i^T は i 層上面でのせん断応力と速度、 τ_{i-1}^D と ξ_{i-1}^D は $(i-1)$ 層下面でのせん断応力と速度を表わしている。

6.3 応力とひずみの関係

動的な土の構成関係を双曲線で近似すると、かなりのひずみレベルにわたって土の動的特性を説明できることが明らかにされている。^{15,16)} これは2個のパラメータで応力～ひずみ関係を表現できる利点があり、地震時の問題などの実用解析には適用しやすい形である。この場合、図 6.3 に示すように、各履歴曲線の頂点を連ねた応力～ひずみの関係式は次式のように与えられる。

$$\tau = \frac{\mu_0 \varepsilon}{1 + \alpha |\varepsilon|} \quad (6.9)$$

ここに、 μ_0 は初期せん断弾性係数、 α は土の動的非線形性の度合を表わすパラメータである。 α が大きくなるにつれて非線形性が大きくなる。いま土のせん断強度を τ_f とすれば、これは式 (6.9) で $\varepsilon \rightarrow \infty$ としたときの τ の値に相当するから、 α の値は次式で定義できる。

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon_y} = \frac{\mu_0}{\tau_f} \quad (6.10)$$

ここに、 ε_y は弾性限ひずみである。

一方、地震時の τ_f はモールクーロンの破壊基準が動的な荷重を受けた場合にも、静的なものと同じであるとすれば、図 6.4 を参照して次式のように定めることができる。¹⁵⁾

$$\tau_f = \sqrt{\left(c' \cos \phi' + \frac{1+K_0}{2} \sigma' \sin \phi' \right)^2 - \left(\frac{1-K_0}{2} \sigma' \right)^2} \quad (6.11)$$

ここに、 c' と ϕ' は有効応力で表現した場合の静的強度係数、 K_0 は静止土圧係数、 σ' は有効上載圧を表わしている。

式 (6.10)、(6.11) を用いて土の非線形度パラメータ α を決定するためには、地盤の c' 、 ϕ' 、 μ_0 などを推定しなければならないが、普通の地盤調査結果から得られる情報は N 値に関するものが多く強度係数が直接与えられることはまれである。そこで N 値などから ϕ' や μ_0 の値を推定する必要があるが、ここでは次式のような関係を用いる。

(i) 砂質土の場合

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &\doteq 1000 N \quad (\text{kg/cm}^2)^{17)} \\ \phi' &\doteq 0.3 N + 27 \quad (\text{度})^{18)} \\ c' &\doteq 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

(ii) 粘性土の場合

$$\left. \begin{aligned} &\text{塑性指数と } \phi' \text{ の関係式}^{19)} \\ q_u &= \sigma' \tan \phi' \quad (\text{kg/cm}^2) \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

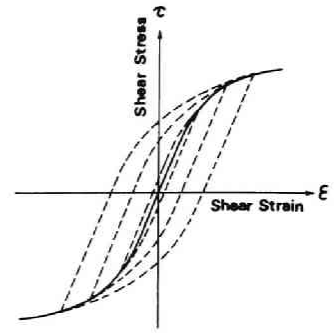


図 6.3 応力ひずみ関係

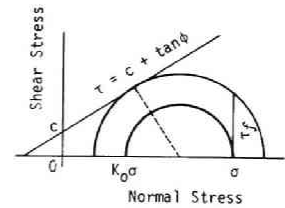


図 6.4 せん断応力 τ_f

$$\mu_0 = 1500 q_u^{20)} \quad (\text{kg/cm}^2)$$

ここに、 q_u は 1 軸圧縮強度である。

式 (6・9) の関係を式 (6・5) に代入すれば、任意のひずみを受けたときの S 波の伝播速度 V_s が次式のように与えられる。

$$\frac{V_s}{V_{s0}} = \frac{1}{1 + \alpha |\epsilon|} \quad (6 \cdot 14)$$

ここに、 V_{s0} は $\alpha=0$ としたときの伝播速度であり、これは微小ひずみでの S 波速度に対応している。 α の値を変化させたとき S 波速度がどのように変化するかを示したのが図 6.5 である。 α が大きくなるにつれて、伝播速度の減少し始めるひずみが小さくなっていくとがわかる。

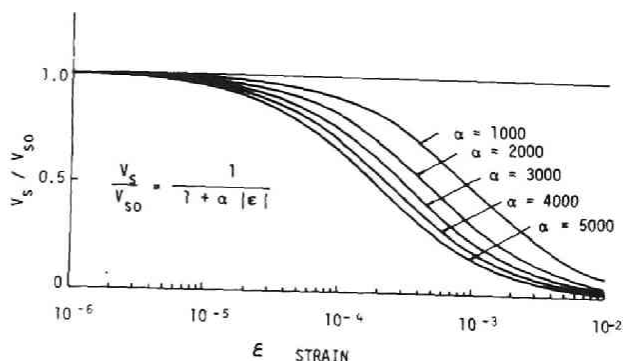


図 6.5 セン断波速度とひずみの関係

6・4 数値解の安定性

非線形双曲形方程式の中で厳密解の求まるのは、今のところ半線形方程式の場合であり、それも不連続解と単純波解のみである。²¹⁾ここで求めようとする解はこのいずれにも相当しないので、非線形解の精度を直接検討することはできない。一方、線形解であれば重複反射理論を用いることにより精度の良い厳密解を求めることができるから、特性曲線法による精度を線形解と比較したのが図 6.6 である。(a) はひずみの最大値 ϵ_{\max} の深さ方向の分布であり、(b) はひずみの $r. m. s$ の深さ方向の分布を、(c) は最大せん断応力の深さ方向の分布を、(d) はせん断応力の $r. m. s$ の深さ方向の分布を示している。用いた強震記録は Taft (1952) であり、測定結果²⁾によれば地表層の S 波の伝播速度は 160 m/sec、単位体積重量は 2.24 g/cm³ である、また記録の時間間隔は 0.02 sec である。図中の実線は厳密解であり、特性曲線法による結果を●印で、階差法による結果を○印で示した。これらの結果から、特性曲線法による数値計算は応力ならびにひずみの計算においてもかなり良い安定性を与えることがわかる。

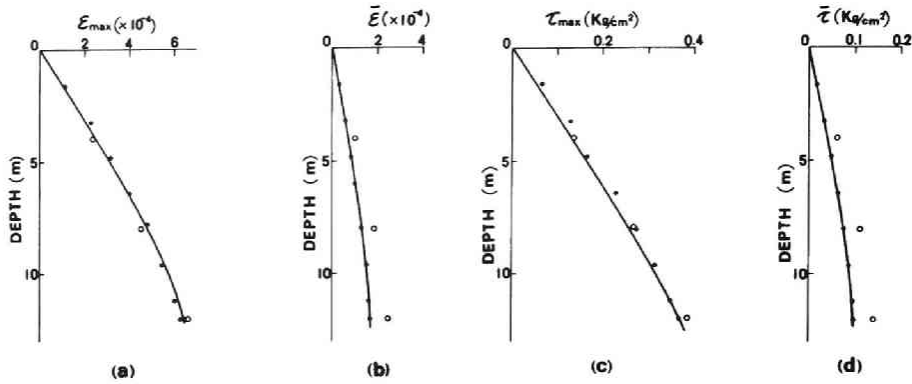


図 6.6 数 値 解 の 安 定 性

6・5 応答におよぼす非線形度パラメータの影響

式(6・9)に含まれるパラメータ α の地盤内応力ならびにひずみにおよぼす影響を調べるため、Taftの強震記録を用いて数値計算を行なった。図6.7はせん断応力の最大値の深さ方向分布で、 α の値を0~5000と変化させた場合のものである。図中において鉛直の細線で示したものはそれぞれ α の値に対応する τ_f の値を示している。 α の値が大きくなるにつれて発生する最大せん断応力が、 τ_f に達する深さが浅くなっていくこともわかる。式(6・9)の応力~ひずみ関係を使用しているから、せん断応力が τ_f に近づくことはひずみが ∞ になることに対応しているわけであり、この場合、式(6・5)で与えられる特性曲線の勾配、すなわちS波速度はゼロとなり波動は伝播しなくなる。このため α の値が大きくなるとある深さ以上解が求まらなくなる。この関係を示したのが図6.8である。 α の値が大きくなるにつれて浅い所でひずみが発散するようになることがわかる。

結局 α の値が0~5000程度変化しても応力の分布形そのものにはあまり大きな変化を受けないが、ひずみの分布形は

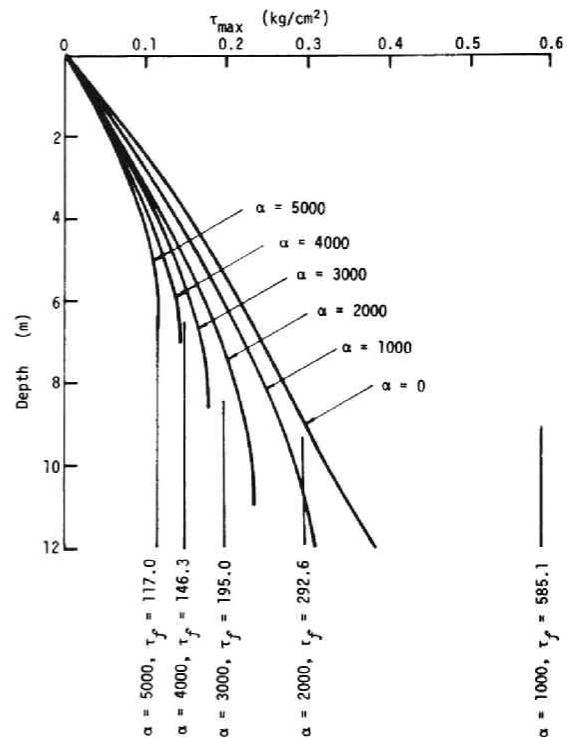


図 6.7 最大せん断応力の分布形におよぼす α の影響

α の値によってかなり異ったものになることがわかる。図 6.9 に深さ 12 m での速度 $\dot{\epsilon}$ 、ひずみ ϵ ならびに応力 τ の時間応答を示した。 α が 2000 以上になると 12 m の深さまで安定な解が求まらないので、 $\alpha = 0$ と 1000 の場合について示してある。これから $\dot{\epsilon}$ と τ の時間応答特性は τ_f の値が τ_f に近づく付近以外の時間では α の大きさによる影響をあまり受けないことがわかる。

以上のことから、強震時に地盤内に発生する地盤内応力やひずみの値を問題にする場合、非線形度パラメータ α の選定が大きな影響を与えることがわかる。

6・6 地盤のモデル化

解析の対象とする地盤の弾性係数は弾性波速度の測定結果や N 値の分布図に基づいて式 (6・12) などから推定できるが、これらの方法で求める弾性係数 μ_0 の値は地層の境界で不連続に変化することが多い。地盤内においては土の弾性係数が一線を画して急変することは稀であると考えられる。また 1 m 程度以下の薄い層の存在は伝播する波動の波長に比較して無視できると考えられるから、弾性波速度、密度、その他の地盤定数に対して 5 m を周期とする一定

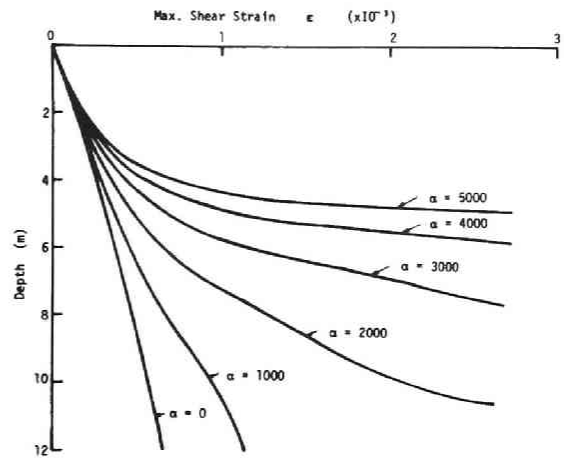


図 6.8 最大せん断ひずみの分布形におよぼす α の影響

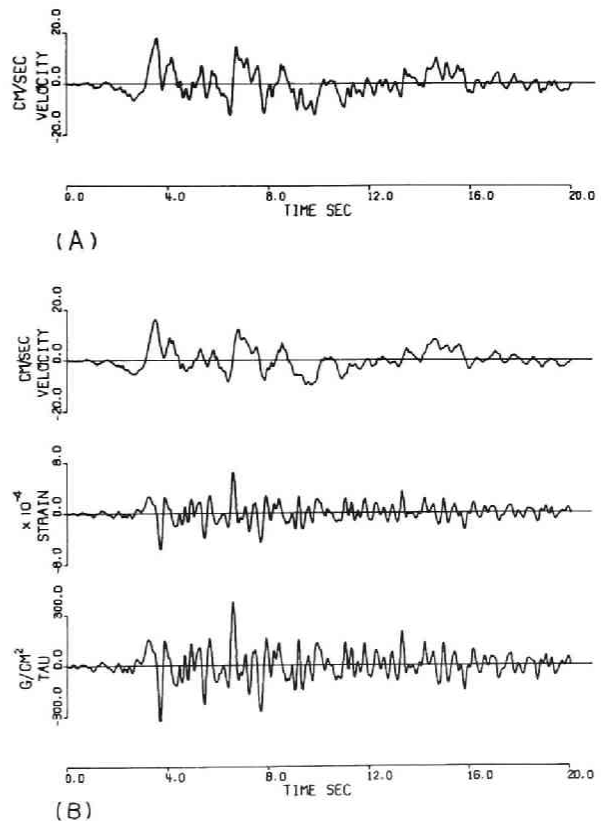
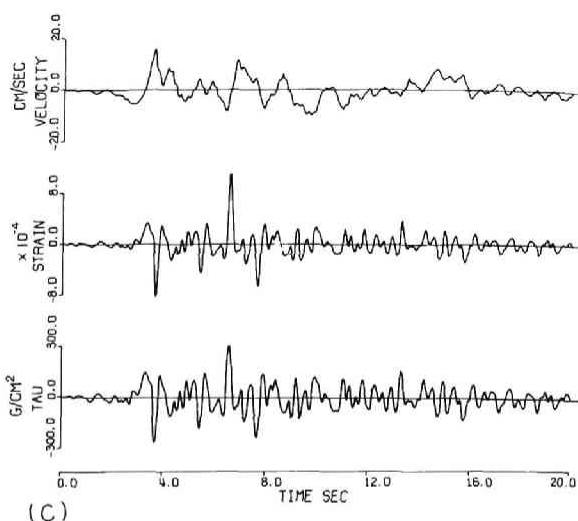


図 6.9 (A) 地表面の速度
(B) 深さ 12 m における速度、せん断ひずみ、せん断応力 (線形)

の重みつき移動平均を行なって、²²⁾ モデル地盤の深さ方向の平滑化を行なった。

図 6.10 に解析に用いた強震記録が得られた地点の地盤図^{3~5)}を示した。これに対して上述の平滑化を行なった後、 S 波速度、式(6・11)より求めた τ_f ならびに、 α の深さ方向の分布を示したのが図 6.11 である。いずれの場合も一般的傾向として τ_f は深さとともに増大し、 α は深さとともに減少していくことがわかる。またわが国の地盤での α の値は表面近くで2000~4000 程度



(C)

図 6.9 (C) 深さ 12 m における速度、せん断ひずみ、せん断応力 (非線形: $\alpha=1000$)

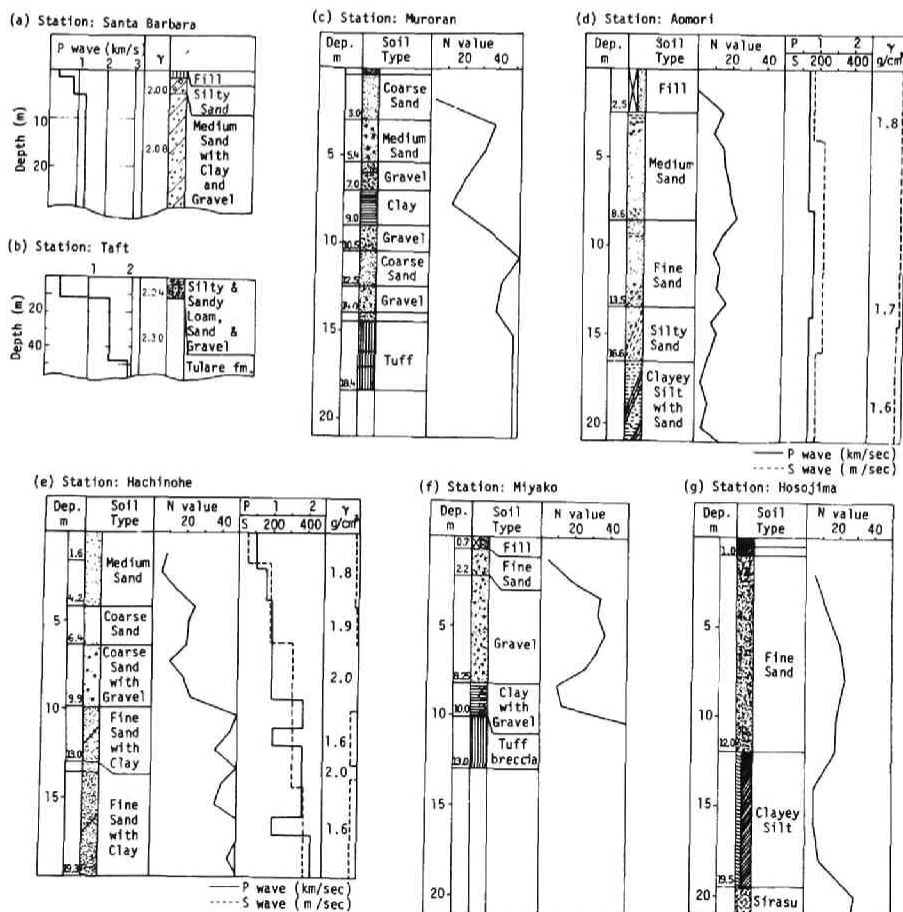


図 6.10 強震観測地点の地盤特性

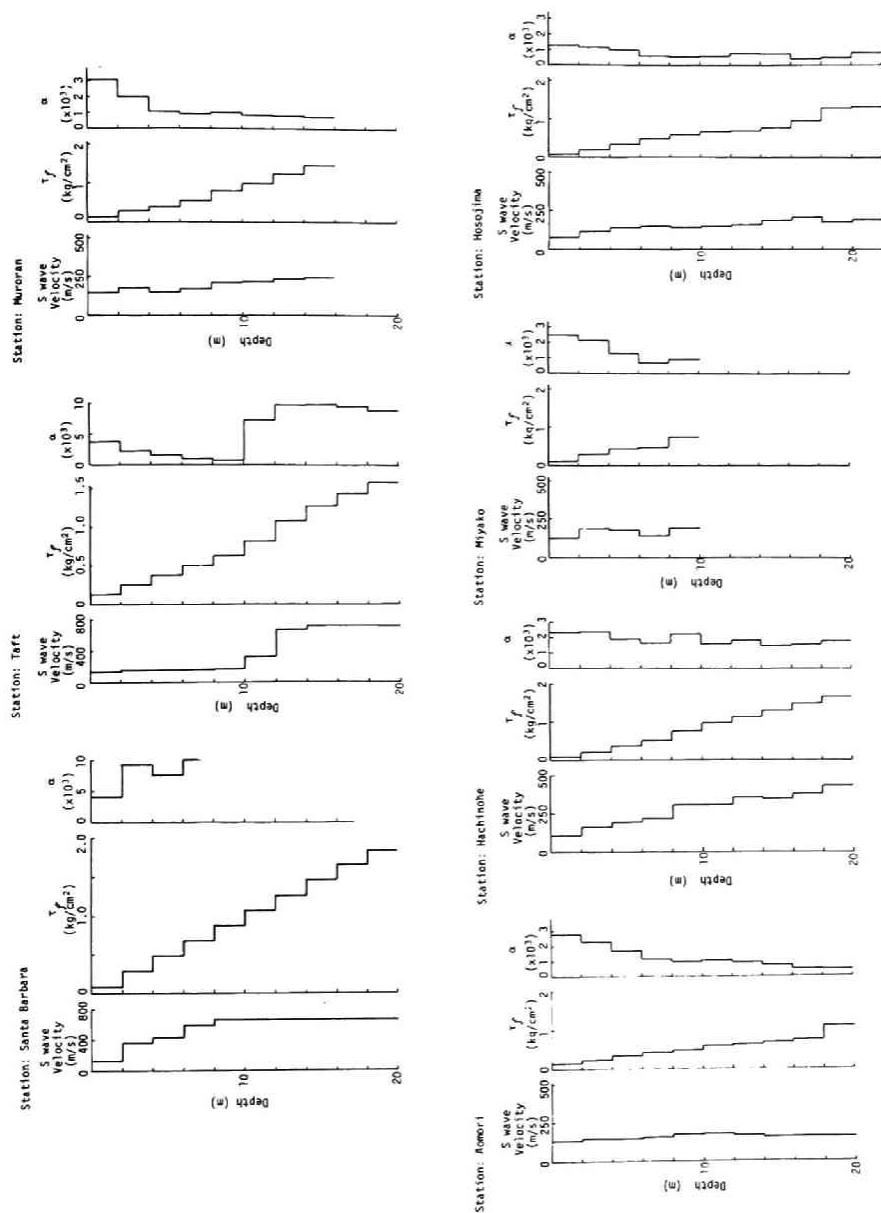


図 6.11 セン断波速度，せん断力， α 値

の値を取り深度が大きくなると500～1500程度まで減少するようである。

6・7 セン断応力とひずみの分布

解析に用いた強震記録は Taft (1952), Santa Barbara (1952), 細島 (1970), および1968年の十勝沖地震 (八戸, 宮古, 青森, 室蘭) によるもので, Taft, Santa Barbaraの波形は0.02秒間隔のデータ²³⁾であり, 十勝沖地震と細島のものは0.01秒間隔で数値化された資料^{24,25)}から0.02 sec 間隔で採取した。数値解析に当っては, それぞれの波形の主要部分20 secを対象としたが, これら10個の強震記録の概要を表6.1に示した。またこれらの波形はすべて2次

表 6.1 地 震 記 録

Station	Date	Component	Max. accel. (gal)	Predominant period (sec)	Record No.
Taft	1952. 6. 21 04:53	SE	175.9	0.34	
Santa Barbara	1952. 6. 21 04:53	SE	128.6	0.93	
Muroran	1968. 5. 16 09:49	SN	209	0.49	S234 N
	1968. 5. 16 19:39	SN	95	0.42	S241 N
Aomori	1968. 5. 16 09:49	SN	213	1.30	S235 N
		SE	180	0.85	S235 E
Hachinohe	1968. 5. 16 09:49	SN	235	2.73	S252 N
		SE	188	1.14	S235 E
Miyako	1968. 5. 16 09:49	SN	118	0.22	S236 N
Hosojima	1970. 2. 26 07:11	SE	119	0.77	S544 E

曲線による基準線補正を行なった。

図 6.12 はこれら一連の強震記録を用い, 図 6.11 のモデル地盤内に発生する最大せん断応力 τ_{\max} の深さ方向の分布を示したものである。破線で示したものが $\alpha=0$ の場合で, 地盤を線形弾性体としたものに相当し, 実線が非線形解析の結果である。いずれの場合も非線形解析による応力の値が線形解析によるものよりも小さくなっている。

図 6.13 は上述の τ_{\max} を地表面での最大加速度 a_{\max} で除したものを深さに対してプロットしたものである。(a)が線形解析によるもの, (b)が非線形解析による結果である。非線形, 線形を問わず深さが10 m程度まではほぼ直線的に τ_{\max}/a_{\max} の値が減少する。表層の S 波速度を V_{s0} , 加速度波形の卓越周期を T_0 とするとき, 地盤を線形弾性体と考えると, 深さが $V_{s0}T_0/8$ より小さい領域では τ_{\max}/a_{\max} と深さの関係が直線で近似できる⁶⁾とされているが, 非線

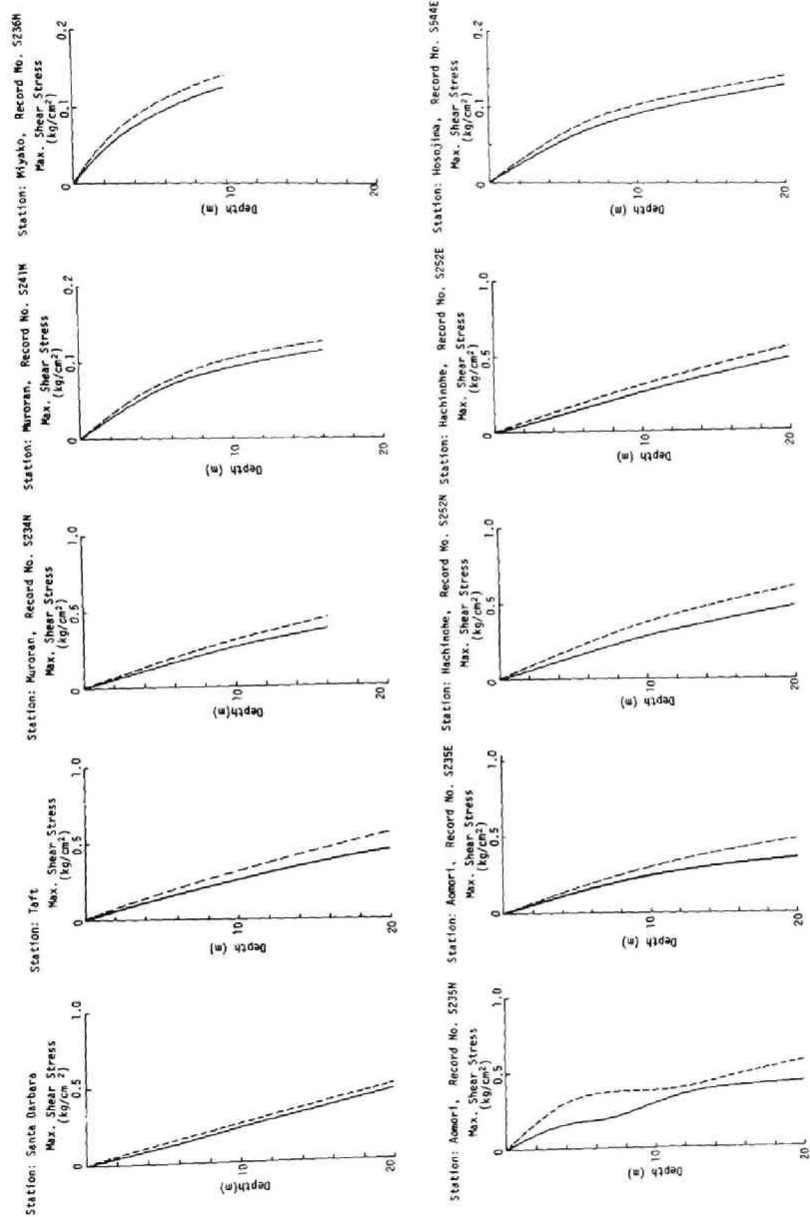


図 6.12 最大せん断応力の分布 (実線：非線形, 破線：線形)

形解析においても、このようなことがほぼ成立するものと考えられる。

図 6.14 は最大ひずみ ϵ_{\max} の深さ方向分布を示したものである。実線は非線形解析で破線は線形解析の結果である。いずれの場合も最大の ϵ_{\max} が発生する深さは 10 m 程度までの浅い表層内であり、深さが増すにつれて ϵ_{\max} の値も減少していく。同図中には式 (6・10) で与えられる弾性限ひずみの深さ方向の分布も同時に示してある。地盤内に発生するひずみがこの弾性限ひずみの $\frac{1}{2}$ 程度以下になると、線形解析と非線形解析結果の

間に大きな差が認められなくなることがわかる。²²⁾

いま ϵ_{\max} の深さ方向分布の最大値を $\bar{\epsilon}_{\max}$ とすれば、この値は地盤の特性による影響を大きく受けるものと考えられる。以下で $\bar{\epsilon}_{\max}$ と地盤特性との関連について考察するが、地盤特性を表わす指標として何を選ぶかが問題になる。ある地点で観測される多数の地震記録のスペクトルに対し平均操作を行なうと、その地盤に固有な周期特性が明らかになると言われているから、²⁶⁾ 地表面で得られた加速度記録の卓越周期をその指標として用いることにする。しかし、地震動の中には周波数特性が時間とともに変動するようなものもあるから、²⁷⁾ 最大せん断ひずみを取り扱う場合、全記録時間での卓越周期を用いたのでは地盤のせん断震動特性を表現し得ない場合もあると考えられる。したがって、ひずみの最大値が発生する時刻の前後 6 秒間での地表加速度記録からその卓越周期 T を読み取り、これを地盤の特性を表わす指標として用いた。図 6.15 は $\bar{\epsilon}_{\max}/a_{\max}$ を T に対してプロットしたものである。○印は線形解析の結果であり、●印は非線形解析の結果である。ここでの解析に用いた加速度記録の範囲では、線形、非線形を問わず T の増加とともに $\bar{\epsilon}_{\max}/a_{\max}$ は増大し、その上限は $1.2 \times 10^{-5} (\text{sec}^2/\text{cm})$ 程度であることがわ

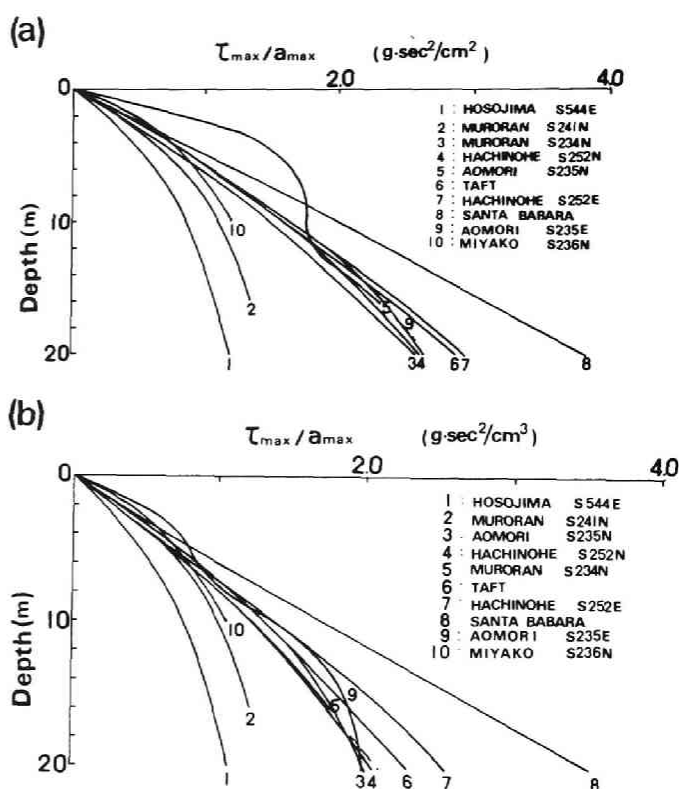


図 6.13 せん断応力の分布, (a) 線形, (b) 非線形

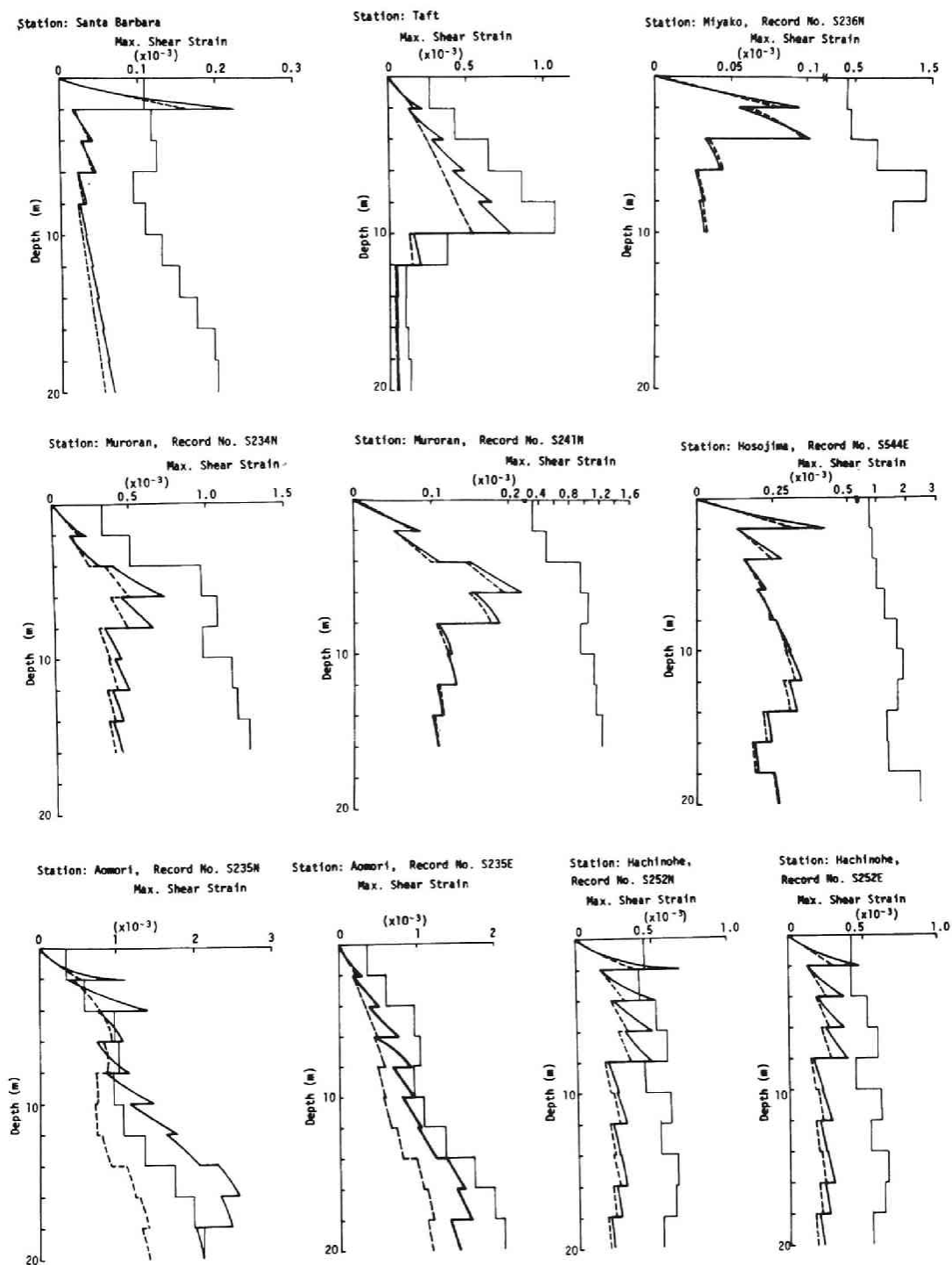


図 6.14 最大せん断ひずみの分布 (太実線：非線形，破線：線形，細実線：弾性限ひずみ)

かる。また、非線形解析によるものが線形解析結果よりも常に大きく、前者は最大で後者のおよそ2倍前後であることも判明する。

6・8 結 論

土の動的非線形挙動を考慮した震動解析を特性曲線法を用いることにより行ない、土の動的非線形性が地盤内に発生するせん断応力やせん断ひずみにおよぼす影響について考察を加えた。得られた成果は以下のように要約できる。

(i) 地盤内に生ずるせん断ひずみの分布とその

最大振幅は土の動的な応力～ひずみ関係の設定結果に大きく左右される。

(ii) 応力～ひずみ関係の非線形度を表わすパラメータである α の値を、これまで強震記録の得られたわが国の地盤を対象にして、 N 値や S 波速度の値から推定すると、いずれの場合もこの値は地表面近くで2000～4000程度の値を取り、深さとともに減少する傾向が見られる。

(iii) 非線形解析においても τ_{\max}/a_{\max} の値の深さ方向の分布は、浅いところではほぼ直線的になる。

(iv) この解析に用いた強震記録から求まるひずみの深さ方向分布の最大値を地表面の最大加速度で除したものは、線形解析、非線形解析によらず1.5秒程度以下の卓越周期をもつ地震では、その上限は $1.2 \times 10^{-5} (\text{sec}^2/\text{cm})$ 程度である。

以上本章で得られた結論を述べたが、ここでは減衰に関しては考慮を加えなかった。地盤の非線形震動性状をさらに詳しく研究するためには、非線形減衰を考慮した解析を行なわなければならない、さらに進んで履歴特性を有する応力～ひずみ関係を用いた解析を行なっていかなければならない。

参 考 文 献

- 1) Seed H. B. and I. M. Idriss : Influence of Soil Conditions on Ground Motions during Earthquakes., Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 95, SM1, pp. 99-137, 1969.
- 2) Duke C. M. and J. Leeds : Site Characteristics of Southern California Strong-Motion Earthquake Stations, Report of the Department of Engineering, University of California at Los Angeles, Nov., 1962.

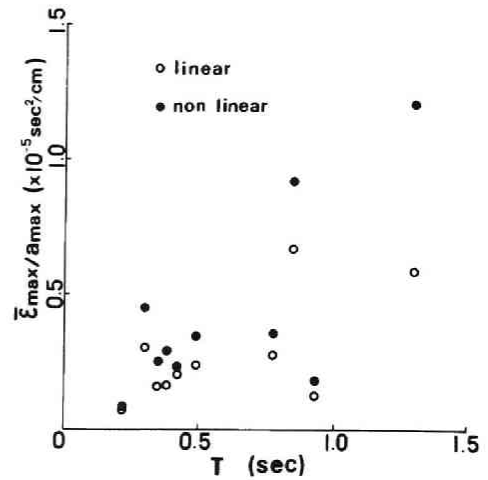


図 6.15 $\dot{\epsilon}_{\max}/a_{\max}$ と T の関係

- 3) Matthiesen R. B., et al. : Site Characteristics of Southern California Strong-Motion Earthquake Stations, Part Two, ditto, Feb., 1964.
- 4) 土田 肇, 山田通一郎, 倉田栄一: 港湾地域強震観測地点資料(その1), 港湾技研資料, No. 34, 11月, 1967.
- 5) 土田 肇, 倉田栄一, 須藤克子: 港湾地域強震観測地点資料(その2), 港湾技研資料, No. 107, 12月, 1970.
- 6) 土岐憲三: 地震記録による地盤内震動分布の推定, 土木学会論文報告集, 第207号, pp. 25-36, 1972.
- 7) 土田 肇, 上部達生: 地表における強震記録より推定した基盤の地震動の特性, 港湾技術研究所報告, 第11巻, 第4号, pp. 191-270, 1972.
- 8) Taylor P. W. and D. R. Bacchus : Dynamic Cyclic Strain Tests on a Clay, Proc. 7th ICSMFE, Mexico, Vol. 1, pp. 1081-1097, 1971.
- 9) Kovacs W. D., Seed, H. B. and K. Chan : Dynamic Moduli and Damping Ratio for a Soft Clay, Proc. ASCE, Vol. 97, SM1, pp. 59-75, 1971.
- 10) Silver M. L. and H. B. Seed : Deformation Characteristics of Sand under Cyclic Loading, Proc. ASCE, Vol. 97, SM8, pp. 1081-1097, 1971.
- 11) Drnevich P. V. : Undrained Cyclic Shear of Saturated Sand, Proc. ASCE, Vol. 98, SM8, pp. 807-825, 1972.
- 12) 栗林栄一, 岩崎敏男, 龍岡文夫, 堀内俊一: 土の動的変形特性—共振法土質試験機による測定—, 土木研究所資料, 第912号, 1974.
- 13) 岡本舜三, 伯野元彦: 地盤の非線形振動に関する研究, 第1回日本地震工学シンポジウム論文集, pp. 45-50, 1962.
- 14) 土岐憲三, 佐藤忠信: 非線形挙動をする表層地盤内における地震時応力, 京都大学防災研究所年報第17号B, pp. 403-415, 1974.
- 15) Hardin B. O. and V. P. Drnevich : Shear Modulus and Damping in Soils : Design Equations and Curves, Proc. ASCE, Vol. 98, SM7, pp. 667-691, 1972.
- 16) 柴田 徹, D. S. Soelarno : 繰返し载荷を受ける土の挙動, 第9回土質工学研究発表会, pp. 351-354, 1974.
- 17) 柴田 徹, 土岐憲三, 寺田邦雄: 砂質土の弾性波速度に関する研究, 京都大学防災研究所年報第13号B, pp. 593-609, 1970.
- 18) 赤井浩一: 土の支持力と沈下, 山海堂, 1964.
- 19) Bjerrum L. and N. E. Simons : Comparison of Shear Strength Characteristics of Nor-

- mally Consolidated Clay, Proc. ASCE Research Conf. on Shear Strength of Cohesive Soils, pp. 711-726, 1960.
- 20) Kiefer F. W., Seed, H. B. and I. M. Idriss : Analysis of Earthquake Ground Motions at Japanese Sites, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 60, No.6, pp. 2057-2070, 1970.
 - 21) Jeffrey A. and T. Taniuti : Non-linear Wave Propagation with Application to Physics and Magnetohydrodynamics, Academic Press, 1964.
 - 22) 土岐憲三：表層地盤内における地震時のせん断応力，第9回土質工学研究発表会，pp. 673-676, 1974.
 - 23) Hudson D. E., et al. : Strong Motion Earthquake Accelerograms, Digitized and Plotted Data, Vol. II-Corrected Accelerograms, Part A, Report of Earthquake Eng. Res. Lab., Calif. Inst. of Technology, Sep., 1971.
 - 24) Tsuchida H., E. Kurata and K. Sudo : Strong-Motion Earthquake Records on the 1968 Tokachi-Oki Earthquake and Its After Shocks, Technical Note of the Port and Harbour Research Institute (Ministry of Transport), No. 80, June, 1969.
 - 25) Tsuchida H., E. Kurata and K. Sudo : Annual Report on Strong-Motion Earthquake Records in Japanes Ports (1970), ditto, No. 116, Mar., 1971.
 - 26) 田中貞二：常時微動と地震動の周期特性の比較，日本建築学会第2回地盤震動シンポジウム資料集「ストレン・レベルによる地震動」，pp. 11-16, 1973.
 - 27) 亀田弘行，北浦 勝：地震動スペクトル密度の時間的变化，昭和47年度土木学会関西文部年次学術講演会概要集，pp. I-32-1, 2, 1972.

第7章 結 語

本研究は地震時における地盤の動的な挙動を明らかにすることを主眼として、地盤内を伝播する非線形波動の特性について種々の観点から検討を加え、地盤を構成している土の構成関係の設定いかんによって、波動の伝播形態がどのように変化するかを整理し、非線形挙動をする表層地盤の震動特性を解析するための方法論を確立しようとしたものである。

一般に表層地盤を構成する土は地殻を構成している物質に比べ、かなり軟かくかつ固体と流体の2相から構成されていることが多いから、このような物体中を伝播する波動特性を明らかにするには、よくまとまった形に完成されている線形波動理論を準用するだけでは、十分にその特性を表現できない場合が生ずるものと考えられる。特に、軟弱な地盤層上に長大な構造物が施工されるような昨今では、土の動的な非線形挙動を考慮した表層地盤の震動特性を解明するための解析手法を確立することは、耐震工学を研究する者にとって早急の課題であると言える。

以上のような観点から、著者がこの数年来実施してきた研究をとりまとめたのが本論文であるが、いくつかの新しい理論的解析手法、実験的手法を用いることにより、地盤の震動特性を解明する上での有益な資料が得られたものと考えられる。研究成果については各章の結論のところで詳しく列挙したが、以下その概要を含めて本論文の内容、成果、問題点、今後の課題等を取りまとめて本論文の結語とする

第1章では本研究の位置づけと方向を明らかにするとともに、関連する学問分野の歴史と最近の研究成果について概観した。

第2章では、土の2相性が波動の伝播形態にどのような影響を与えるかを明らかにする目的で、土を流体で飽和された多孔質弾性体と考え、このような物体中を伝播する単純波の伝播形態について考察を加えた。まず弾性相と流体相からなる2相混合体の運動方程式をラグランジェ密度関数を用いることにより基準座標系で表示した。つぎに、こうして得た方程式系が全双曲形になるための条件を求めた。この場合には単純波解が存在するので、その伝播形態について調べた。その結果、2相系を伝播する単純波は、正ならびに負の方向に伝播する波動を1組のものと考えれば、4組存在し、それらは2組の圧縮波と2組のせん断波動から構成されていること、ならびに波動の伝播形態は2種類であり、円偏波と平面偏波から構成されており、前者の形で伝播するのは弾性体中を伝播するせん断波の1組であり、残りの3組は後者の形で伝

播することを明らかにした。平面偏波の場合には、適当な条件が与えられると、流体相と弾性相中を伝播する圧縮波はせん断変形をとまわずに伝播できるが、弾性相中を伝わるせん断波は流体相あるいは弾性相に体積変化を発生させるから、平面偏波形のせん断波は単独に存在できないことを示した。また円偏波の場合には、境界上で圧縮ひずみがゼロであればせん断波が独立に伝播できることも同時に示した。さらに各波動の伝播速度をひずみの関数として表現した。なお本章では波が伝播する媒質を保存系と考えているので、内部減衰機構は考慮されていない。内部減衰のある場合の単純波解の存在条件がどうなるかについては今後の課題として残されている。

第3章も土の2相性に着目した研究であるが、本章では2相混合体中を伝播する不連続面の性質について考察を加えた。特に波面を横切る方向の2階の微係数に不連続性を有する波動を取り上げた。これは加速度波と呼ばれている。2相系の構成関係はNaghdi等が提案したものをを用いた。不連続面の伝播形態は基準座標系で取り扱う方が、その表現形式が簡単になるので、場の方程式は基準座標系に変換したものをを用いている。まず加速度波の振幅に関する一般的な性質を基準座標系で表示した後、構成関係に速度勾配が含まれる2相混合体中を伝播する加速度波の存否について調べ、特殊な条件下では加速度波が伝播できることを示した。また2相系を伝播する加速度波は各相を独立に伝播できること、構成関係に相対速度が入る場合には、加速度波の伝播条件から相対速度の応力におよぼす影響は2次以上のオーダーになること、ならびに伝播する波動の数は各相に3組、合計6組の波動が存在することなどを明らかにした。さらに、2相系を伝播する加速度波の振幅を支配する方程式を求め、一定方向へ伝播する加速度波の振幅の時間的挙動を調べた結果、時間がたつと振幅が増加し発散する場合と、時間とともに減少し滑らかな波動へと遷移する場合とがあることを示した。なお、拡散力と温度の振幅におよぼす影響は非常に大きく、両者の効果はほぼ同等であることを明らかにした。

以上述べてきたように本章では2次の不連続面のみしか取り扱っていないが、1次の不連続面である衝撃波の伝播形態に関する研究は今後に残された課題である。また地殻のずり破壊などによって発生する波動現象では波動の発生源から遠ざかるにつれて不連続の強度は弱くなり、しだいに滑らかな波動へ変換してゆくはずであるが、このような不連続性の高い波動から低い波動への遷移現象の解析も解決しなければならない問題の1つである。

第4章では地盤のように多層構造をもつ媒質中を屈折や反射を繰り返しながら伝播する非線形調和波動について論じた。前2章では土の2相性に着目し単層の媒質中を伝わる単調な非線形波動解を求めたが、土の2相性を考慮して非線形調和波動解を求めることは非常に困難であるので、本章では土の動的応力～ひずみ関係の非線形性のみに着目した。水平な成層地盤を対

象とし、基盤層から SH 形の調和波動が入射したときの表層地盤の波動伝達特性の解析的な表現形式を求めた後、土の動的応力～ひずみ関係の設定いかんによって、表層の波動伝達特性がどのように変化するかを明らかにした。使用した土の動的応力～ひずみ関係は、履歴特性を有する要素を等価線形化したものであり、せん断弾性係数ならびにせん断粘性係数が、ひずみ振幅の関数として表わされるようなものである。比較のために用いた要素は Bi-linear, Jennings, Hardin 形の 3 種類である。まず数値解の安定性について考察を加えたのち、一定加速度入力のものとの波動伝達特性について調べた。この結果、Bi-linear 形の履歴減衰は振動数が高くなるにつれて小さくなること、Jennings 要素の特性を決定する 2 つのパラメータのうちの 1 つである τ が大きくなると、Jennings 形の履歴減衰は振動数が高くなるにつれて小さくなること、またもう 1 つのパラメータ α のわずかな変化によって地表面の加速度応答倍率から求まる共振点は大きく低周波側へ移動することなどがわかった。また Hardin 形の場合には、減衰定数の非線形度パラメータ α_c は、地表面の加速度応答倍率から求まる共振振動数に影響を与えないことも判明した。さらに、入力の強度が増加すると地表面の加速度応答倍率が減少し共振点も低周波側へ移動すること、地盤内に発生するせん断ひずみの分布形は入力強度の増大にともなってかなり変化するが、せん断応力の分布形はあまり変動しないことも明らかにした。なお地盤の不均質性がこれらの分布形におよぼす影響についても検討を加えた結果、不均質地盤内のせん断ひずみの分布形は均質と仮定したときのものに比べてかなり異なったものになることが確認できた。

以上述べてきたように、本章における研究を通じて、土の動的応力～ひずみ関係の設定が表層地盤の震動特性に及ぼす影響をかなり詳しく捕えることができたが、本解析手法は基盤層から定常な調和波動が入射し、表層地盤内を同じ周波数の強制波動が伝播するとして解の表現形式を求めたものであって、解の安定性に関する考察はほとんど行っていない。また、高調波や分数調波の伝播問題も今後解明しなければならない問題の 1 つである。なお、地震波のような非定常非調和的な波動に対して本章の解析手法を適用するためには地盤内に発生しているひずみの大きさを表わす指標 τ_0 の決定法が問題になるが、これは今後に残された課題である。

第 5 章では砂質地盤中を伝播する S 波速度 V_s の応力依存性について実験的考察を加えている。本章で取り扱った波動は微小振幅 S 波であるから、これまでの章で考えてきた非線形波動とは異なったものであるが、媒質が過去に受けた履歴によって V_s がどのように変化するかを調べるのが目的であるから、広義の意味で非線形状態下での波動問題を取り扱ったものと考えることができる。実験装置は三軸試験装置と超音波発生装置とからなっており、ひずみ制御圧

縮あるいは伸張試験を行ないながら、各せん断段階で砂供試体中を透過する S 波形の超音波パルスの時間遅れを測定することによって伝播速度を決定した。この結果、等方圧縮時のせん断波速度は有効拘束圧の $1/4$ に比例すること、異方向応力を受ける飽和砂中のせん断波速度は強い応力依存性を示し、主応力比 σ_1/σ_3 が 2 より大きくなると、平均有効主応力の変化だけでは説明のできない V_s の変化が生ずること、 σ_1/σ_3 が 2 以下で繰り返し载荷を行なった場合には、ほぼ弾性的な挙動を示し、除荷によって V_s は最初の値を回復するが、 σ_1/σ_3 が 2 以上の場合には、除荷によって V_s が最初の値まで回復されないことなどが明らかになった。これらの実験結果を考慮して、実地盤内での V_s の推定式を示した。また土粒子が最も活発に滑動すると考えられる潜在すべり面上の垂直応力 σ_N とせん断応力 τ の比 τ/σ_N がある値より小さければ、 V_s の等方圧縮状態からのずれは伸張、圧縮の両側にわたって統一的に表現できることを明らかにした。

この研究により伸張、圧縮のかんりの応力領域にわたる V_s の挙動を推定するための基本的資料が得られたものと考えられるが、本実験では V_s に及ぼす間げき比や中間主応力の影響について調べることができなかった。今後、これらの影響を考慮した実験を実施する必要がある。

第 6 章では、これまでに得られている強震記録を基にして地盤内の震動特性、特に地盤内に発生するせん断ひずみならびにせん断応力の大きさについて考察を加えた。地表面の記録から地盤内の震動分布を推定するために、解析は特性曲線法を用いて行なった。解析に用いた土の動的応力～ひずみ関係は双曲線形のものであって、せん断弾性係数がひずみの関数となるようなものである。まず数値解の安定性について調べた後、応力～ひずみ関係の非線形度パラメータの選定が地盤内に発生するせん断応力やせん断ひずみの分布形に大きな影響を及ぼすことを明らかにした。つぎに、強震記録の得られた我国の地盤を対象として、この非線形度パラメータを、 N 値や S 波速度の値から推定した。この結果、この値は地表面近くで 2000～4000 程度の値を取り深さとともに減少する傾向のあることが明らかになった。この値を用いて地盤の震動解析を行なった結果、非線形性を考慮した解析では、線形の場合に比べて、せん断ひずみは大きくなり、せん断応力は減少するという結論を得た。また地盤内に発生している最大せん断応力を地表面の最大加速度で割った値は、地表面下 10 m 程度までは、ほぼ直線的な分布をすること、地盤内に発生する最大ひずみ分布の最大値を地表面の最大加速度で割った値は、線形、非線形解析のいずれの場合も、1.5 秒以下の卓越周期をもつ地盤ではその上限が $1.2 \times 10^{-5} (\text{sec}^2/\text{cm})$ 程度になることが明らかになった。

以上本章における研究を通じて、地震時の地盤内に発生する応力やひずみの大きさについての知見が得られたが、本章での解析には土の動的な履歴減衰特性は考慮されていない。地震の

強度が大きくなるにつれて土要素の履歴減衰は大きくなるはずであるから、この影響を加味した震動解析が今後なされなければならない。

本論文の概要および地盤内を伝播する非線形波動の伝播特性を解明するために有用と思われる研究結果の記述は以上の通りであるが、地盤の合理的な震動解析手法を確立するためには上述したように引き続き解決されねばならない事項も多く、今後の研究に待つところが大きいといわねばならない。本論文がこの方面の研究を進める上で資するところがあれば幸いである。

最後に本研究を遂行するにあたり終始ご指導ご鞭撻賜わった京都大学教授後藤尚男先生、柴田 徹先生、本論文の内容について種々ご討議いただいた京都大学助教授土岐憲三先生に深甚な謝意を表わす次第である。また第2章の内容について討議いただいた京都大学助教授小林昭一先生、第3章の研究を進めるにあたりご討議いただいた京都大学教授徳岡辰雄先生、第5章の実験を実施するに際してご協力いただいた当時の京都大学大学院生の酒井和広君にも謝意を表わす次第である。

なお、本論文の数値計算は京都大学防災研究所防災科学資料センター FACOM230-25, 京都大学大型計算機センター FACOM230-75 によったものであることを付記する。

